PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 15 — 1. August 1930 — Redaktionsschluß für Nr. 17 am 10. August 1930. — 31. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. Kapitza, Die Veränderung des Widerstandes von Goldkristallen in einem Magnetfeld bei sehr tiefen Temperaturen und die Supraleitfähigkeit. S. 713.

Cl. Schaefer u. H. Pese, Zur Definition der Sättigung. S. 720.

E. Ekefors, Spektren im extremen Ultraviolett. Mit Tafel XX. S. 737.

U. Ph. Lely, Ein Experiment das die Kräfte demonstriert, welche die Verschiebung der Kontinente verursachen können. S. 738.

H. Keefer, Ein Vorlesungsversuch mit flüssigem Sauerstoff. S. 742.

Besprechungen:

O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory. S. 743.

G. Wiarda, Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. S. 743.

G. Bruhat, Traité de Polarimétrie. S. 743.

Th. Wulf, Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. S. 744.

Grimsehls Lehrbuch der Physik. I. Band. Mechanik, Wärmelehre, Akustik. 7. Aufl. S. 744.

Personalien. S. 744.

Redaktionelle Mitteilungen:

Herr Professor Dr. Harms hat sich gezwungen gesehen, wegen Überlastung mit anderen Arbeiten aus der Redaktion auszutreten. Manuskriptsendungen von Originalarbeiten sind nunmehr zu richten an: Herrn Professor Dr. P. Debye, Leipzig C 1, Linnéstraße 5.

Die Redaktion der zusammenfassenden Berichte wird, wie bisher, von Herrn Professor Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstraße 43, weitergeführt.

Wir sprechen Herrn Professor Harms für seine Tätigkeit im Interesse der Zeitschrift unseren besten Dank aus.

Redaktion und Verlag.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Veränderung des Widerstandes von Goldkristallen in einem Magnetfeld bei sehr tiefen Temperaturen und die Supraleitfähigkeit[1]).

(Kritische Bemerkungen zu den neuesten Arbeiten von Meißner und Scheffers[2]).

Von P. Kapitza.

Im vergangenen Jahre hatte Verf. über systematische Untersuchungen über die Veränderung des Widerstandes, die bei einer Reihe von Metallen in starken Magnetfeldern auftritt, berichtet. Als Ergebnis dieser Arbeiten wurden die folgenden Formeln gefunden, die die relative Änderung des Widerstandes $\Delta R/R_0$ mit dem Feld H ausdrücken:

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \beta' \frac{H^2}{3 H_k} \qquad H \leqslant H_k \qquad (1)$$

und

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \beta' \left(H - H_k + \frac{H_k^2}{3H} \right) \qquad H \geqslant H_k \qquad (2)$$

β' und H_k sind bei gegebener Metallprobe und gegebener Temperatur konstant. Diese beiden Ausdrücke bilden eine kontinuierliche Kurve und es ist ersichtlich, daß Formel (1), die für die schwächeren Felder gilt, ein Ansteigen des Widerstandes mit dem Quadrate von H zeigt, während Formel (2), die für starke Felder gilt, eine Widerstandsveränderung nach einem linearen Gesetz zeigt. Diese beiden Formeln wurden auf mathematischem Wege unter folgender Annahme erhalten: Es ist bekannt, daß in einem Metall, das sich nicht in einem kristallin vollkommenen Zustand befindet und das geringe Spuren von Verunreinigungen enthält, eine Störung vorhanden ist, durch die der spezifische Widerstand des Metalles anwächst. Verf. hat eine Hypothese vorgeschlagen, nach der durch das äußere Magnetfeld der spezifische Widerstand in ähnlicher

[1]) Übersetzt mit Erlaubnis der Royal Society aus Proc. Roy. Soc. **126**, S. 683.

[2]) Physik. Zeitschr. **30**, 827, 1929.

Weise anwächst, wie durch innere Inhomogenitäten, die also einem inneren ungeordneten Magnetfeld seiner Wirkung nach gleichzusetzen sind. Wenn nämlich das Metall einem äußeren Magnetfeld H ausgesetzt wird, so ist die Widerstandszunahme so, als wäre sie hervorgerufen durch eine Kombination dieser beiden Felder. Es wurde ferner angenommen, daß der Widerstandsanstieg proportional dem Magnetfeld ist, was zu Formel (1) und (2) führt, die mit allen meinen experimentellen Ergebnissen sehr gut übereinstimmen. Aus dieser Hypothese lassen sich einige wichtige Folgerungen ziehen.

Wir können erst einmal erwarten, daß das lineare Gesetz der Widerstandsänderung, wenn wir statt eines Metalles in Drahtform, wie es bei den meisten meiner Untersuchungen geschehen ist, einen chemisch sehr reinen Einkristall nehmen, bei viel geringeren Magnetfeldern auftritt und schon bei Feldern, wie sie durch gewöhnliche Elektromagneten erzeugt werden, erhalten werden kann. So beträgt schätzungsweise für die besten zur Verfügung stehenden Goldkristalle das kritische Feld für $H_k = 3$ kG, während für Gold in Drahtform das kritische Feld unter den bestmöglichen Bedingungen nie geringer war, als 60 kG. Wenn wir einem vollkommenen Kristall noch näher kommen, so können wir also im Idealfall erwarten, endlich ein lineares Gesetz der Widerstandsänderung

$$\Delta R/R_0 = \beta' H \qquad (3)$$

zu erhalten.

Eine zweite wichtige Folgerung aus meiner Hypothese ist die, daß durch Störungen, hervorgerufen durch strukturelle Gitterinhomogenitäten, der spezifische Widerstand eines idealen Metalles um einen Wert ΔR_0 vergrößert wird, den ich „additiver Widerstand" nannte und den ich einem Widerstandsanstieg durch ein ungeordnetes Magnetfeld H_k gleichsetze. Der numerische Wert von ΔR_0 kann leicht aus Formel (1) und (2) erhalten werden, wenn die Werte von β' und H_k experimentell bestimmt sind. Wir erhielten für

$$\Delta R_0/R_0 = \beta' H_k. \qquad (4)$$

Eine geometrische Darstellung des Wertes $\Delta R_0/R_0$ kann erhalten werden dadurch, daß man eine Asymptote zu der durch Formel (1) und (2) gegebenen Kurve zieht. Der negative Wert der Ordinate, der von dieser Asymptote abgeschnitten wird, ist gleich $\Delta R_0/R_0$. Der so, innerhalb des Temperaturbereiches meiner Versuche, erhaltene Wert von ΔR_0 scheint für ein gegebenes Metall konstant zu sein und wenn wir ΔR_0 vom Gesamtwiderstand R einer gegebenen Metallprobe subtrahieren, so erhalten wir den Widerstand R_{id}, der den für ein gegebenes Element und einer bestimmten Temperatur konstanten idealen spezifischen Widerstand darstellt. ΔR_0 wächst bei Vorhandensein von strukturellen Inhomogenitäten der Metallprobe und es scheint aus den experimentellen Daten, daß die Werte von ΔR_0 von derselben Größenordnung seien, wie der Restwiderstand, den wir erwarten, wenn wir die Probe bis zu Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkt abkühlen. Dies führte zu meiner Annahme der Identität des additiven und des Restwiderstandes.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit berichteten Meißner und Scheffers (loc. cit.) über einige wertvolle Untersuchungen über die Veränderung des Widerstandes von Goldkristallen in einem Magnetfeld bei tiefen Temperaturen. Im Verlauf dieser Arbeit kommen die beiden Verfasser auch zu einer Überprüfung der Fragen, über die ich berichtet habe. Die Schlüsse, die sie aus ihren Versuchen ziehen, zeigen nicht vollständige Übereinstimmung mit meiner Hypothese, obwohl einige allgemeine Gesichtspunkte des linearen Widerstandsgesetzes von ihnen als richtig angesehen werden. Es soll, da ich mit der Art der Darstellung und Interpretation, die Meißner und Scheffers für ihre Ergebnisse anwenden, nicht ganz einverstanden bin, im folgenden versucht werden, zu zeigen, daß dieselben Ergebnisse, wenn sie nur von einem anderen Gesichtspunkt aus als dem von Meißner und Scheffers betrachtet werden, eine gute Stütze für meine Hypothese ergeben.

Meißner und Scheffers haben drei Proben von Gold untersucht, zwei in Form von Einkristallen (Au_{11} und Au_8) und eine in Form von Draht (Au_{II}). Die Versuche wurden bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs (78,5° K), des flüssigen Wasserstoffs (20,4° K) in einem Magnetfeld bis zu 12,5 kG und bei der Temperatur von flüssigem Helium in einem Feld bis zu 0,6 kG durchgeführt. Die Ergebnisse sind eingetragen in Kurven, in denen das Magnetfeld auf der Abszisse und die relative Widerstandsänderung auf der Ordinate aufgetragen sind. In der Darstellung ihrer experimentellen Ergebnisse wird von Meißner und Scheffers der Widerstandsanstieg ΔR auf den Widerstand R_0 bei einer Temperatur von 0° C bezogen, während ich den Widerstandsanstieg auf den Widerstand bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs beziehe. Obwohl es von keinerlei Wichtigkeit für die Diskussion der Ergebnisse ist, will ich, um Konfusionen bei den Formeln zu vermeiden, an Meißner und Scheffers' Bestimmungen der Widerstandsänderungen festhalten und, um zwischen dem früher gebrauchten Wert von β und dem jetzt gebrauchten zu unterscheiden, von β' sprechen. Einige der von Meißner und Scheffers wiedergegebenen Diagramme sind in Fig. 1

und 2 dargestellt. Die einzelnen Punkte wurden photographisch von der Arbeit von Meißner und Scheffers kopiert und sind durch kleine Kreise gekennzeichnet.

Es ist besonders aus den bei der Temperatur von flüssigem Wasserstoff aufgenommenen Kurven ersichtlich, daß der allgemeine Verlauf der

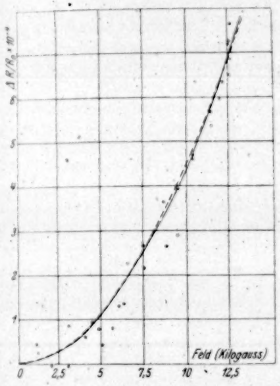


Fig. 1.

Kurve mit dem der Kurve, die von meinen Formeln (1) und (2) erwartet werden kann, übereinstimmt. Nach einer anfänglichen Krümmung steigt die Kurve gerade an. Zur Erklärung dieser Kurve nehmen Meißner und Scheffers aus mir nicht bekannten Gründen eine der meinen verschiedene Formel an. Die Widerstandsänderung folgt nach ihnen einem hyperbolischen Gesetz, das, ausgedrückt in den Konstanten der Formeln (1) und (2) lautet:

$$\Delta R/R_0 = \beta' \left(\sqrt{H^2 + H_k^2} - H_k\right). \qquad (5)$$

Diese Formel gibt ebenfalls ein lineares Gesetz, wenn H sehr groß ist gegenüber H_k und ein quadratisches Gesetz, wenn H sehr gering ist.

Trotzdem die Formeln (2) und (5) letzten Endes dieselbe Asymptote ergeben, ist doch ein deutlicher Unterschied zwischen ihnen insofern, als die durch Formel (5) erhaltenen Werte immer oberhalb denen durch (1) und (2) erhaltenen liegen; die Formel von Meißner und Scheffers legt sich auch nicht so gut an die Asymptote an, als die von mir aufgestellte. Wenn wir H_k und β' aus den experimentell erhaltenen Kurven durch Formel (5) und Formel (1) und (2) abzuleiten versuchen, so erhalten wir nur dann ähnliche Werte, wenn die Kurve sich über einen Bereich erstreckt, innerhalb dessen der Maximalwert von H sehr groß ist im Vergleich zu dem von H_k. Wenn, wie in den meisten der vorliegenden Versuche, diese Bedingung nicht erfüllt ist, so treten in den Ergebnissen aus meiner Formel und denen von Meißner und Scheffers beträchtliche Unterschiede ein.

Wir wollen zuerst die experimentellen Ergebnisse diskutieren, die an dem Goldkristall Au_{11} erhalten wurden, der nach Meißner und Scheffers der vollkommenste Kristall gewesen ist. Die Werte, die bei der Temperatur des flüssigen Stickstoffs an diesem Kristall erhalten wurden, sind in Fig. 1 durch kleine Kreise wiedergegeben. Die Kurve, von der Meißner und Scheffers annehmen, daß sie das Gesetz der Widerstandsänderung darstellt, ist ausgezogen, die von ihnen mittels Formel (5) erhaltenen Werte von β' und H_k sind folgende: $H_k = 50$ kG, $\beta' = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$, der additive Widerstand beträgt $\Delta R_0/R_0 = 28 \cdot 10^{-3}$. (In Meißner und Scheffers' Bezeichnung $\Delta R_0/R_0 = a$, $H_k = b$.) Die Kurve, die ich durch meine Formeln (1) und (2) erhalte, ist in Fig. 1 gestrichelt dargestellt; ich erhalte Werte von $H_k = 7{,}8$ kG, $\beta' = 1{,}07 \cdot 10^{-7}$ und

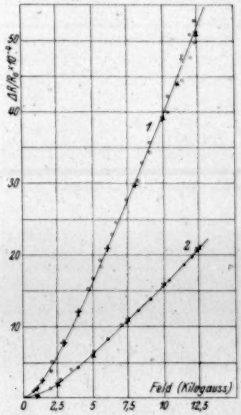


Fig. 2.

$\Delta R_0/R_0 = 0{,}8 \cdot 10^{-3}$, das ist ein 30mal kleinerer additiver Widerstand, als nach der Schätzung von Meißner und Scheffers. Aus Fig. 1 folgt, daß der geringe Unterschied zwischen den Kurven von Meißner und Scheffers und mir innerhalb der durch das Experiment bedingten Fehlerquellen liegt. Die Kurve, die Meißner und Scheffers bei der Temperatur von flüssigem Wasserstoff am selben Kristall erhalten, ist durch die ausgezogene Linie in Fig. 2 wiedergegeben. Die von ihnen aus Formel (5) abgeleiteten Werte betragen: $H_k = 2{,}5$ kG, $\beta' = 4{,}8 \cdot 10^{-7}$ und $\Delta R_0/R_0 =$

Tabelle.

	Kristall Au_{II}				Kristall Au_5			Draht Au_{II}		
	H_k kg	$\beta' \times 10^7$	$\Delta R_0/R_0 \cdot 10^3$ Meine Formeln	$\Delta R_0/R_0 \cdot 10^3$ Meißner und Scheffers	H_k kg	$\beta' \times 10^7$	$\Delta R_0/R_0 \times 10^3$ Meine Formeln	H_k kg	$\beta' \times 10^7$	$\Delta R_0/R_0 \cdot 10^3$
Flüssiger Stickstoff T (78,5° K)	7,8	1,07	0,8	28,0	7,8	1,07	0,8	187	3	56
Flüssiger Wasserstoff T (20,4° K)	1,65	4,68	0,77	1,2	2,5	2,06	0,5	—	—	—
Flüssiges Helium T (4,2° K)	0,5 ?	7,5 ?	0,4 ?	0,18	—	—	—	—	—	—
Restwiderstand gemessen von Meißner und Scheffers. $R_r/R_0 \cdot 10^3$ . . .	—	—	0,38	—	—	—	1,0	—	—	35

$1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Aus meinen Formeln komme ich zu den in der Figur durch Kreuze angezeigten Werten, die mit der Kurve so gut übereinstimmen, daß sie dieselbe Linie ergeben. Die aus meinen Formeln erhaltenen Werte betragen $H_k = 1{,}65$ kG $\beta' = 4{,}68 \cdot 10^{-7}$, $\Delta R_0/R_0 = 0{,}77 \cdot 10^{-3}$.

Die Übereinstimmung der Werte mit denen von Meißner und Scheffers ist hier besser, als bei den Versuchen mit flüssigem Stickstoff. Dies war auch zu erwarten, da der Wert von H_k kleiner ist als der Maximalwert von H, dem Magnetfeld, innerhalb dessen die Versuche durchgeführt wurden. Bei der Temperatur von flüssigem Helium endlich kommen Meißner und Scheffers zu $H_k = 0{,}37$ kG, $\beta' = 4{,}9 \cdot 10^{-7}$, $\Delta R_0/R_0 = 0{,}18 \cdot 10^{-3}$. Da nur sieben Punkte bei drei verschiedenen Feldstärken gemessen wurden und die einzelnen Ergebnisse für dasselbe H mehr als 25 Proz. differieren, so ist es unmöglich, irgendwelche bestimmte Werte von H_k und β abzuleiten, die ja vollkommen von der Form der Kurve abhängen. Es ließe sich z. B. mit meinen Formeln eine Kurve darstellen, die zwischen den gemessenen Punkten läuft mit folgenden verschiedenen Werten: $H_k > 0{,}5$ kG, $\beta' > 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ und $\Delta R_0/R_0 \geqslant 0{,}38 \cdot 10^{-3}$; um zuverlässige Werte zu erhalten, müßte jedoch der Bereich des Magnetfeldes, in dem der Versuch durchgeführt wird, beträchtlich über 0,6 kG erhöht werden. Alle so erhaltenen Ergebnisse sind in der Tabelle dargestellt. Wir sehen, daß die Werte von $\Delta R_0/R_0$, die nach meinen Formeln erhalten wurden, für verschiedene Temperaturen ziemlich konstant zu sein scheinen, in Übereinstimmung mit den Forderungen meiner Hypothese. Meißner und Scheffers kamen durch ihre Formeln zur entgegengesetzten Folgerung.

Die Werte von H_k und β' wurden für den zweiten Kristall Au_5 von Meißner und Scheffers mitbestimmt. Die von mir für diesen Kristall durch meine Formel erhaltenen Werte sind in obiger Tabelle wiedergegeben. Ich nahm für die Temperatur flüssigen Stickstoffs für H_k und β' dieselben Werte wie für den Kristall Au_{II} an, die experimentellen Fehler sind in diesem Falle so groß, daß Meißner und Scheffers von einer Trennung der Kurve absehen. Auch bei der Temperatur flüssigen Wasserstoffs ist, wie aus Fig. 2 ersichtlich, die Übereinstimmung meiner theoretischen Kurve mit dem Experiment sehr gut. Bei der Temperatur flüssigen Heliums erreicht in dem verwendeten Bereich des magnetischen Feldes die Kurve nicht den linearen Teil, jede Ableitung von β' und H_k ist, ebenso wie im Falle des Kristalles Au_{II}, zwecklos.

Der Draht Au_{II} endlich, der nach Meißner und Scheffers nicht sehr rein war, müßte meiner Ansicht nach ein großes H_k ergeben und annäherungsweise wenigstens dem quadratischen Gesetz im Bereich der Magnetfelder, die bei den vorliegenden Versuchen zur Anwendung kamen, folgen. Wir können tatsächlich eine theoretische Kurve ziehen, die sich zwischen die experimentell gefundenen Punkte einfügt. Unter der Annahme, daß bei einer Temperatur von flüssigem Stickstoff der Draht dasselbe β' besitzt wie der in meinem ursprünglichen Versuch benutzte Draht Au_{II} (S. 302 loc. cit.), erhielten wir für $H_k = 187$ kG und für $\Delta R_0/R_0 = 56 \cdot 10^{-3}$, obwohl die so erhaltenen Werte nur als sehr angenähert zu gelten haben. Betrachten wir die Kurve von Meißner und Scheffers für diesen Draht bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs, so sehen wir, daß sie viel stärker gebogen erscheint, als die Kurve für

die Kristalle, d. h. daß H_k noch sehr groß ist und der lineare Teil bei den Feldern unter 12,5 kG noch nicht erreicht ist; eine Trennung von β' und H_k erscheint demnach nicht möglich.

Es scheint mir nach Prüfung der in Tab. I wiedergegebenen Werte, daß der Schluß von Meißner und Scheffers, daß die Werte von $\Delta R_0/R_0$ mit der Temperatur stark variieren, vollkommen unhaltbar ist, es scheint mir im Gegenteil, daß bei Verwendung meiner Formeln die Konstanz von $\Delta R_0/R_0$ sogar besser ist, als man nach der Genauigkeit und den Bedingungen der vorliegenden Experimente erwarten konnte.

Vor einer weiteren Diskussion der Versuche muß noch darauf hingewiesen werden, daß die Werte von β', H_k und $\Delta R_0/R_0$ nicht mit großer Genauigkeit aus einer experimentell erhaltenen Kurve geschätzt werden können, selbst wenn der Bereich des Magnetfeldes, das bei den Messungen zur Anwendung kam, fünf- oder sechsmal größer ist als das kritische Feld H_k. Selbst in diesem Falle ist unter gewissen Bedingungen ein ziemlich beträchtlicher Irrtum möglich. Der Hauptgrund dafür liegt in folgenden zwei Tatsachen: 1. ist es möglich, daß meine Formeln (1) und (2), die unter sehr einfachen Annahmen abgeleitet wurden, in Wirklichkeit nicht exakt das genaue Gesetz der Änderung des Widerstandes für schwächere Felder wiedergeben; in der Ableitung dieser Formeln wurden ja einige vereinfachte Annahmen gemacht (S. 348 loc. cit.), vor allem die, daß die Felder H_k ungeordnete Verteilung und konstanten Wert besitzen. Dies kann kaum der Fall sein. Andererseits können wir, selbst wenn die Formeln korrekt sind, besonders in guten Kristallen kaum erwarten, daß die Inhomogenitäten gleichmäßig über das ganze Volumen des Kristalles verteilt sind. An einigen Stellen beispielsweise, an denen der Kristall stärker beansprucht wurde, wie es beim Einspannen immer der Fall sein wird, werden die Störungen größer sein und ein größeres H_k hervorrufen; an anderen Stellen ist H_k vielleicht sehr gering oder selbst Null. Daraus folgt, daß die wirklich beobachtete Kurve eine Überlagerung einer Reihe von solchen Kurven darstellt, wie sie durch (1) und (2) mit verschiedenem H_k wiedergegeben werden; daraus folgt wieder, daß die Kurve des quadratischen Gesetzes am Anfang abgeflachter sein wird und im Bereich des linearen Gesetzes bei stärkeren Feldern selbst bei großem H eine Biegung zeigen wird. Für eine genaue Bestimmung von β' und H_k müssen Versuche unternommen werden, bei denen H nicht nur im Vergleich mit dem ungefähren Wert H_k aus der Kurve, sondern mit dem maximalen Wert H_k des Metalles groß ist; nur dann gibt die Asymptote den genauen Wert für $\Delta R_0/R_0$. Wir können daher trotz der Tatsache eines konstanten Wertes für ΔR_0, der aus Meißner und Scheffers' Versuchen durch meine Formeln erhalten wurde, nicht von einem absoluten Beweis sprechen, nur bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs war H viel größer als H_k, während bei den anderen Temperaturen diese Bedingung nicht erfüllt war, so daß in diesen Fällen die Konstanz von $\Delta R_0/R_0$, die hier gefunden wurde, überraschenderweise gut war.

Der zweite Punkt, der in Verbindung mit meiner Hypothese von Interesse ist, ist die Frage nach der Identität des additiven Widerstandes $\Delta R_0/R_0$ und des Restwiderstandes R_r/R_0 der Drahtprobe, die von Meißner und Scheffers bei der Temperatur des flüssigen Heliums untersucht wurde. Die von ihnen erhaltenen Werte sind in der letzten Reihe der Tabelle wiedergegeben. Wie ersichtlich, ist für beide Kristalle Au_{11} und Au_5 der additive und der Restwiderstand von derselben Größe. Auch die Schätzung des additiven Widerstandes des Golddrahtes Au_2 stimmt trotz der Tatsache, daß er hundertmal größer ist als der eines Kristalles, mit den aus den magnetischen Messungen erhaltenen Werten des additiven Widerstandes überein. Daß die Werte in allen diesen Fällen gewiß nicht identisch sind, braucht nicht notwendigerweise zurückgeführt werden auf verschiedene Fehler bei der Ableitung von β' und H_k aus den Kurven, sondern kann allgemeinere Gründe haben. Neben den durch das Experiment bedingten Fehlern sind gewiß noch andere Faktoren, die berücksichtigt werden müssen. So ist es beispielsweise möglich, daß der Kristall bei verschiedenen Temperaturen durch Kräfte, die auf die thermische Kontraktion zurückzuführen sind und die von der Art der Einspannung des Kristalles abhängen, ungleichmäßig deformiert war (Meißner und Scheffers geben leider keine Einzelangaben über die Versuchsanordnung)[1]). Dadurch werden notwendigerweise $\Delta R_0/R_0$ und R_r/R_0 beeinflußt. Aber selbst wenn diese Fehlerquellen vermieden

1) Auch in anderer Hinsicht wird durch das Fehlen von experimentellen Einzelheiten die Diskussion der Versuche erschwert. So ist beispielsweise von den beiden Autoren nicht angegeben, ob irgendwelche Vorsichtsmaßregeln getroffen wurden, um die thermische E.M.K. im Kristall zu eliminieren. Durch Umkehr der Stromrichtung kann dies leicht erreicht werden. Außerdem kann bei nichtsymmetrischer Stellung der Kontakte in einem kurzen Kristallstück eine E.M.K. durch einen Hulleffekt hervorgerufen werden, die ebenfalls durch Umkehr des Feldes eliminiert werden kann. Wenn durch irgendeinen Zufall diese Vorsichtsmaßregel von Meißner und Scheffers außer acht gelassen würde, so könnten sie beispielsweise das unerwartete Phänomen der Differenz von β' für verschiedene Kristalle erklären. (Hinzugefügt in der deutschen Übersetzung.)

sind, so ist es durchaus möglich, daß die Differenz zwischen $\Delta R_0/R_0$ und R_r/R_0 allein durch die Tatsache bedingt ist, daß die Störungsstellen im Kristall nicht gleichmäßig verteilt sind, der Kristall also an verschiedenen Stellen einen verschiedenen spezifischen Widerstand besitzt. Der Strom, der durch den Kristall fließt, wird im Durchschnitt nicht gleichmäßig verteilt. Wenn ein Magnetfeld von einigen Kilogauß angelegt wird, so wird der Widerstand in den verschiedenen Teilen des Kristalles ungleichmäßig steigen, und da bei der Temperatur flüssigen Heliums oder flüssigen Wasserstoffs der Widerstand des Kristalles auf das Doppelte steigt, so wird im Magnetfeld der Strom eine verschiedenartige Verteilung erfahren, als ohne das Feld. Der additive Widerstand, den wir im Magnetfeld gemessen haben, wird in diesem Fall in Verbindung zu bringen sein mit dieser neuen Verteilung des Stromes, für die der Restwiderstand verschieden sein wird von dem, der bei Messungen in der Nähe des absoluten Nullpunktes beobachtet wird.

Alle diese Betrachtungen sprechen dafür, daß die Übereinstimmung zwischen dem additiven Widerstand $\Delta R_0/R_0$, wie er aus den Messungen erhalten wurde, und dem Restwiderstand R_r/R_0 zufriedenstellend ist. Alle diese von vornherein schwer zu berücksichtigenden Effekte geben uns die Erklärung, warum die von mir früher ausgesprochene Vermutung, daß das kritische Feld für Goldkristalle, das Meißner verwandte, 3 kG hätte sein sollen, nicht ganz korrekt war und in Wirklichkeit zu 7,8 kG gefunden wurde.

Auch einige andere interessante Punkte, die aus der Arbeit von Meißner und Scheffers hervorgehen, wären noch zu berücksichtigen, so z. B. die mögliche Änderung von β' und H_k mit der Temperatur, ferner die Kristallorientierung. Es würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, wenn wir auf alle diese Punkte eingehen würden.

Es soll im folgenden noch auf einen anderen Punkt eingegangen werden, nämlich auf eine Bemerkung von Nernst, die von Meißner und Scheffers angeführt wird und die sich auf die Möglichkeit einer Existenz des linearen Gesetzes bezieht. Das kritische Feld H_k wurde in meinen früheren Versuchen zwischen 60 und 135 kG festgestellt. In den Versuchen von Meißner und Scheffers an Kristallen fällt es, wie wir gesehen haben, bis zum Bereich von 1,65—7,8 kG. Bei vollkommeneren Kristallen besteht die Aussicht einer Verminderung des Wertes des kritischen Feldes zu einem noch geringeren Betrag; es sind keinerlei experimentelle Anhaltspunkte vorhanden dafür, daß wir uns nicht weitgehend einem linearen Gesetz nähern können, wie in Formel (3) dargestellt. In Übereinstimmung mit den Feststellungen von Meißner und Scheffers nimmt Nernst an, daß ein lineares Gesetz unmöglich sei, da mit einem Wechsel des Vorzeichens des Feldes auch der größer gewordene Widerstand sein Vorzeichen ändern müßte. Diese Annahme ist richtig, wenn das Anwachsen des Widerstandes in einem Magnetfelde durch direkte Einwirkung des Feldes auf die Bewegung der Elektronen hervorgerufen ist, wie in einer Reihe von theoretischen Arbeiten angenommen wird; unter dieser Annahme müssen wir ein quadratisches Gesetz erwarten, wie es tatsächlich auftritt. Die experimentelle Tatsache der Möglichkeit einer Existenz des linearen Gesetzes zeigt uns jedoch, daß das Anwachsen des Widerstandes durch ein Magnetfeld nicht durch direkte Wirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung der Elektronen oder Elektronenwellen zurückzuführen ist. Ich nehme vielmehr, wie schon erwähnt, an, daß das Magnetfeld eine Störung im Kristall hervorruft, die einen ähnlichen Einfluß auf die Leitfähigkeit des Kristalles besitzt, wie Verunreinigungen oder Unvollkommenheiten des Kristallgitters. Das bedeutet aber, daß durch das Feld die Bewegung der Elektronen nicht beeinflußt wird, wohl aber die Atome oder das Gitter als solches und erst dadurch tritt ein Einfluß auf den Elektronenfluß ein. Eine Veränderung der Richtung des Feldes wird nur eine Veränderung in der Richtung der Störung verursachen, der Widerstand wird weiter anwachsen.

In ihrer Schlußbemerkung nehmen Meißner und Scheffers zu den in meiner Arbeit mitgeteilten Annahmen über die Entstehung der Supraleitfähigkeit Stellung. Leider gibt es noch keine Theorie der Elektronenleitfähigkeit, die so weit entwickelt wäre, daß sie eine hinreichende Erklärung dieser Erscheinung geben könnte; die größte Schwierigkeit liegt ja nicht in der Erklärung des supraleitenden Zustandes selbst, sondern in der Erklärung des plötzlichen Sprunges bei seinem Erscheinen. Meine Hypothese geht dahin, daß der Anstieg des Widerstandes der supraleitenden Metalle in einem Magnetfeld in keiner Weise verschieden ist von dem anderer Metalle. Andererseits wurde der Schwellenwert des Widerstandes, wie er im Falle der Supraleitung beobachtet wurde, von derselben Größenordnung befunden, wie der von mir gemessene additive Widerstand. Dies führte mich zur Annahme, daß der Mechanismus der Supraleitfähigkeit in dem plötzlichen Verschwinden des additiven Widerstandes besteht, wobei der verbleibende ideale Widerstand viel kleiner ist, als zuerst angenommen wurde. Tatsächlich erscheint diese Hypothese in vielen Fällen sehr geeignet, andere

Erscheinungen des supraleitenden Zustandes zu erklären[1]).

Bernal[2]) gab später eine Erklärung des wahrscheinlichen Mechanismus des Verschwindens des additiven Widerstandes. Er führt es auf ein plötzliches Ausfrieren von Störungsstellen im Kristallgitter beim Schwellenwert der Supraleitfähigkeit zurück. Durch diese Vorstellung konnte Bernal eine wahrscheinliche Erklärung dafür geben, warum nur einige Schwermetalle augenblicklich als Supraleiter gefunden wurden.

Der gewichtigste Einwand, der augenblicklich von experimenteller Seite gegen meine Hypothese erhoben wurde, ist der von Meißner und Scheffers und ein Einwand, ebenfalls aus letzter Zeit, von Bartlett[3]). Es wird angeführt, daß die Messungen von Kammerlingh Onnes und Tuyn[4]) ergeben, daß in supraleitendem Blei bei einer Temperatur von $4{,}2^0$ K der Widerstand 10^{-10} desjenigen bei 273^0 K beträgt. Andererseits ergeben die von Meißner und Scheffers durch Extrapolation aus der Formel von Grüneisen errechneten Werte einen Widerstand, der im supraleitenden Zustand 10^6 mal zu groß ist, nämlich nur 10^{-4} des Wertes bei 273^0 K. Dieser Einwand würde in der Tat schwer zu widerlegen sein, wenn ein entscheidender Beweis für die Korrektheit einer solchen Extrapolation bestehen würde. Das Gesetz der Veränderung des Widerstandes innerhalb der letzten Grade oberhalb des absoluten Nullpunktes ist ja tatsächlich unbekannt, und zwar deshalb, weil selbst bei den besten augenblicklich zur Verfügung stehenden Kristallen, wie z. B. auch bei den von Meißner und Scheffers untersuchten, der additive Widerstand bei dieser niedrigen Temperatur viel größer ist, als der ideale, so daß selbst eine angenäherte Trennung der beiden unmöglich ist.

Aus einer eingehenderen Analyse der experimentellen Werte über den Widerstand bei tiefen Temperaturen komme ich zum Schluß, daß Grund vorhanden ist, anzunehmen, daß die Veränderung des Widerstandes im Gebiete der niedrigsten Temperaturen knapp oberhalb des absoluten Nullpunktes viel rascher als nach T^4 oder selbst T^5 sich verändert, wie unlängst von Bloch bemerkt wurde[5]), wahrscheinlich sogar nach irgendeiner Exponentialfunktion ausgedrückt werden kann. Wenn man den Widerstand für verschiedene Temperaturen in einem logarithmischen System aufträgt, wie es vor einiger Zeit von Borelius[1]) getan wurde, so läßt sich die Richtigkeit dieser Behauptung zeigen. Aus diesem Diagramm, in dem Borelius zahlreiche Daten gut untersuchter Metalle eintrug, kann man sehen, daß mit abnehmender Temperatur das Gesetz der Veränderung des Widerstandes schrittweise sich nach höheren Potenzen von T in dem Maße verändert, als die Temperatur abnimmt. Zuerst verändert sich der Widerstand nach T^2, hierauf innerhalb eines kürzeren Temperaturbereiches nach T^3, in einem noch kürzeren Bereich gilt das Grüneisensche T^4-Gesetz; es ist deutlich ersichtlich, daß die Kurve dann noch weiter ansteigt und so die Möglichkeit einer Veränderung nach T^5 oder noch höheren Potenzen anzeigt.

Aus der Kurve in Fig. 3 ist ersichtlich, daß es möglich ist, für Blei bei niedrigen Temperaturen zu sehr geringen Widerstandswerten zu kommen. Ich kam zu den Punkten der Kurve dadurch, daß ich von den Widerstandswerten für

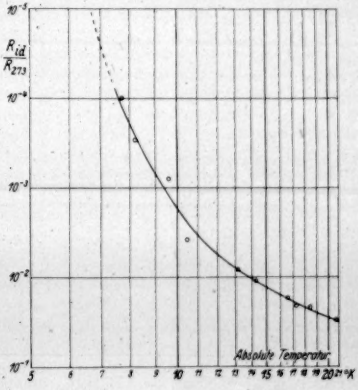


Fig. 3.

Blei oberhalb $7{,}65^0$ K[2]) die Werte des additiven Widerstandes abzog, wobei ich gemäß meiner Theorie den additiven Widerstand gleich dem Schwellenwert des Widerstandes annahm; die so erhaltenen Punkte sind auf einer logarithmischen Skala auf der Vertikalachse aufgetragen. Die entsprechenden absoluten Temperaturen sind, ebenfalls logarithmisch, auf der Abszisse eingezeichnet. Die für diesen Punkt gezogene Kurve steigt in dem Maß kontinuierlich an, wie die Temperatur abnimmt. Es muß hier bemerkt

1) Vgl. Nature **123**, S. 870, 1929 und loc. cit. S. 356.
2) Trans. Faraday Soc. **25**, S. 373, 1929.
3) Nature **123**, S. 870, 1929 und loc. cit. S. 356.
4) Leiden Communication, Nr. 198.
5) Zeitschr. Physik **59**, S. 208, 1929.

1) Zeitschr. Phys. **54**, S. 807, 1929.
2) Die Daten sind aus den von Kammerlingh Onnes und Tuyn zusammengestellten Tabellen entnommen (Leiden, Communication Nr. 58, S. 23).

werden, daß eine logarithmische Skala verwendet wurde; das bedeutet, daß n, wenn wir das Gesetz der Änderung des Widerstandes durch T^n ausdrücken, kontinuierlich bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt ansteigt.

Aus der Kurve in Fig. 3 ist ersichtlich, daß durch Extrapolation der Kurve bis zur Temperatur von 4,2° K, bei der die Versuche von Kammerlingh Onnes und Tuyn unternommen wurden, man Werte für R_{Td}/R_{273} erhalten kann, die größenordnungsmäßig 10^{-10}, oder selbst noch kleiner sein können. Eine genaue Extrapolation ist unmöglich, ich glaube jedoch, daß die Kurve zeigt, daß vom rein experimentellen Standpunkt aus es vollkommen unmöglich ist, die Möglichkeit eines idealen Widerstandes bei den geringen Werten, die im supraleitenden Zustand beobachtet wurden, zu bestreiten.

Ich möchte noch darauf hinweisen, daß die Annahmen, die ich in meinen früheren Arbeiten im Hinblick auf das Gesetz der Widerstandsänderung in einem Magnetfeld dargestellt habe und ebenso meine Darlegungen über die Supraleitfähigkeit eine gute Arbeitshypothese ergeben und uns ein neues Arbeitsfeld erschlossen haben. Obwohl wir noch weitere experimentelle Bestätigungen der Genauigkeit unserer Annahmen benötigen, so scheinen doch die letzten experimentellen Ergebnisse von Meißner und Scheffers, wenn sie durch meine ursprünglichen Formeln erklärt werden, nicht nur die Korrektheit der Gedankengänge meiner Theorien zu verstärken, sondern auch ihren Anwendungsbereich zu vergrößern.

Zusammenfassung.

Die von Meißner und Scheffers erhaltenen experimentellen Ergebnisse der Widerstandsveränderung von Goldkristallen in einem Magnetfeld bei Temperaturen von flüssigem Stickstoff, flüssigem Wasserstoff und flüssigem Helium werden diskutiert. Die Interpretierung dieser Versuche durch Meißner und Scheffers wird kritisiert; sie sind im Widerspruch zu einigen theoretischen Annahmen, die vom Verf. darüber ausgesprochen wurden.

Es wird gezeigt, daß durch eine Erklärung der experimentellen Ergebnisse mit den ursprünglichen Formeln des Verf. volle Übereinstimmung hinsichtlich der theoretischen Annahme erzielt wird.

Die kritischen Bemerkungen von Meißner und Scheffers über die Annahme des Verf. über den Ursprung der Supraleitfähigkeit werden besprochen.

Ich bin Herrn Dr.-Ing. P. Rosbaud für seine Unterstützung bei der Übersetzung dieser Arbeit sehr dankbar.

Cavendish Magnetic Laboratory, Cambridge.

(Eingegangen 26. April 1930.)

Zur Definition der Sättigung.

Von Clemens Schaefer und Herbert Pese.

1. In den letzten Jahren sind wiederholt Veröffentlichungen erschienen, welche die Richtigkeit und Brauchbarkeit der Dreikomponententheorie verneinen. Ohne in Abrede zu stellen, daß diese Theorie nicht nur ergänzungsfähig, sondern in mannigfacher Hinsicht sogar ergänzungsbedürftig ist, muß doch festgestellt werden, daß bisher alle als besser empfohlenen Farbtheorien auch nicht entfernt soviel leisten wie sie. Wenn dies von manchen Gegnern verkannt wird und unberechtigte Vorwürfe immer wieder gegen sie erhoben werden, so kann das nur daran liegen, daß die Kenntnis der Grundlagen der Dreikomponententheorie oft nicht so eingehend ist, wie man es in Anbetracht der hervorragenden Namen, an welche diese Theorie anknüpft — es sei auf Newton, Th. Young, Graßmann, Helmholtz, Maxwell und verschiedene bewährte Physiker der Gegenwart hingewiesen — erwarten sollte.

Als besonders schwerwiegend unter allen Einwänden gegen die Dreikomponententheorie ist die Behauptung zu werten, sie stehe nicht mit der Erfahrung im Einklange und widerspreche ihr sogar oft. Es erscheint darum angebracht, die Grundlagen dieser Theorie in aller Kürze im 1. Kapital der vorliegenden Arbeit zu besprechen, wobei besonderer Nachdruck auf den innigen Zusammenhang zwischen Erfahrung und Theorie gelegt werden soll.

I. Die Grundlagen der Dreikomponententheorie.

2. Das natürliche Farbensystem. Jede auf normale Weise zustande kommende Gesichtsempfindung wird durch Lichtstrahlen hervorgerufen, deren Wellenlänge zwischen $\lambda_0 = 390\ \mu\mu$ und $\lambda_1 = 750\ \mu\mu$ liegt. Innerhalb dieser Grenzen des sichtbaren Spektrums kann entweder ein einziger zusammenhängender Spektralbezirk von beliebiger Breite oder auch eine beliebige Anzahl von Spektralbezirken, in irgendeinem Intensitätsverhältnisse gemischt, die Lichtempfindung erzeugen.

Würde unser Auge jede derart mögliche Kombination objektiver Lichtgemische von jeder anderen unterscheiden können, so wäre im allgemeinen die Angabe von unendlich vielen Komponenten nötig, um eine einzige Lichtempfindung zu bestimmen. Da nun, wie die Erfahrung lehrt, objektiv sehr verschiedene Lichtgemische ein und denselben Eindruck bewirken können, so ist die Gesamtsumme aller möglichen Lichtempfindungen erheblich kleiner als diejenige

aller möglichen Lichtreize. Mit anderen Worten: selbst für den normalen farbentüchtigen Menschen existieren viel weniger in irgend einer Hinsicht verschiedene Farbenempfindungen als es objektiv verschiedene Lichter gibt.

Die Anzahl der für die Kennzeichnung einer Farbe notwendigen und hinreichenden Bestimmungsstücke ergibt sich ebenfalls rein empirisch: Wählt man irgend einen Lichtreiz, welcher eine bestimmte Lichtempfindung hervorruft, und ändert ihn nun in jeder denkbaren Weise ab, so wird man im allgemeinen auch eine Änderung der sich ergebenden Lichtempfindung beobachten. Wenn man die relative Zusammensetzung des Lichtreizes unverändert läßt, seine Intensität jedoch gleichmäßig erhöht oder erniedrigt (etwa durch Benutzung von Blenden mit verschiedener Öffnung), so ergeben sich Lichtempfindungen, welche sich voneinander nur durch verschiedene Helligkeit unterscheiden und die wir (nach J. von Kries) als „Farben gleicher Reizart" bezeichnen[1]). Ändert man dagegen die Zusammensetzung des Lichtreizes, indem man z. B. Farbgläser als Filter einschaltet oder auch andere Spektrallichter hinzumischt, so ist eine Änderung der Lichtempfindung in zweifacher Weise möglich: bei gleichem Farbtone kann die eine Farbe mehr oder weniger weißlich als die andere aussehen — die beiden Farben unterscheiden sich durch ihre „Sättigung" — anderseits können sie auch im Farbtone voneinander verschieden sein.

Mehr als die eben genannten drei Unterscheidungsmerkmale — Farbton, Sättigung, Helligkeit — aufzufinden, ist erfahrungsgemäß völlig unmöglich, so daß also jede Farbe durch sie eindeutig bestimmt wird; das natürliche Farbensystem des farbentüchtigen Menschen ist also eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit oder kurz: ist dreidimensional.

3. Die Young-Helmholtzsche Dreifarbentheorie. Im engen Anschluß an diese grundlegende Erfahrungstatsache nimmt die von Young und Helmholtz stammende Dreikomponententheorie an, daß drei verschiedene Prozesse durch Lichtreize im helladaptierten farbentüchtigen Menschenauge ausgelöst werden.

Nach dieser Theorie erwecken von diesen drei Grunderregungen allerdings nicht unmittelbar die eine in uns die Empfindung des Farbtones, die zweite und dritte diejenige der Sättigung bzw. der Helligkeit. Vielmehr gelten als Elementarprozesse, welche sich in den sog. Zäpfchen der Netzhaut unseres Auges abspielen, eine Rot-, eine Grün- und eine Blauerregung, aus deren Zusammenwirken sich jedoch in einfacher Weise die Empfindungen Farbton, Sättigung und Helligkeit ergeben.

Die Ableitung dieses Komponententripels beruht ihrerseits auf empirisch gefundenen Tatsachen, nämlich auf dem Gesetze der Farbenmischung, wie es bereits von Newton — als die sog. Schwerpunktskonstruktion der Farbenmischung — aufgestellt, von Graßmann theoretisch untersucht und in vier Grundsätze zusammengefaßt und schließlich von Helmholtz und Maxwell experimentell nachgeprüft wurde. Danach läßt sich jede Farbe aus drei Grundfarben ermischen, welche an und für sich beliebig gewählt werden können bis auf die eine Bedingung, daß keine von ihnen durch Mischung der beiden anderen herstellbar sein darf. In praxi ist es vorteilhaft, die Eichfarben möglichst gesättigt zu wählen; denn stärker als sie selbst gesättigte Farben können in der üblichen Weise nicht aus ihnen gemischt werden[1]). Wie es vielfach gebräuchlich ist, sind auch in der vorliegenden Arbeit die drei sog. Fehlfarben der Dichromaten als Grundfarben gewählt worden; da sie gesättigter als alle anderen normalerweise wahrnehmbaren Farben sind, so lassen sich alle reellen Farben in der gewöhnlichen Weise aus ihnen mischen.

Die entstandene Mischfarbe kann man sich jedoch — unabhängig davon, aus welchen und wie vielen Einzelfarben man sie tatsächlich hergestellt hat — in zwei Bestandteile zerlegt denken, nämlich in „reine Farbe" und in Weiß. Die reine Farbe, welche den Farbton bestimmt, entspricht einer einzigen oder der Mischung zweier Grundfarben in einem beliebigen Verhältnisse, „Weiß" kann dagegen nur durch gleichzeitige Erregung aller drei Grundfarben in einem ganz bestimmten Verhältnisse erzeugt werden. Setzt man — nach dem Vorbilde A. Königs — die Einheiten der Rot-, Grün- und Blau-Erregung willkürlich so fest, daß gleiche Mengen der drei Grunderregungen „Weiß" ergeben, so mischt sich in einer Farbe, welche alle drei Grundfarben enthält, die am wenigsten vorhandene Grundfarbe mit gleichen Mengen der beiden anderen zu Weiß, während der Rest die reine Farbe ergibt. Besteht also beispielsweise eine Farbe aus

$$a\ \text{Rot} + b\ \text{Grün} + c\ \text{Blau},$$

wobei

$$a > b > c,$$

1) Hierbei ist nur zu beachten, daß der Lichtreiz niemals einen Bereich normaler Intensität über- oder unterschreiten darf, um Blendungserscheinungen und Dämmerungssehen auszuschließen.

1) Über die „uneigentliche" Farbmischung, welche bei der Wahl zu wenig gesättigter Grundfarben nötig werden kann, siehe näheres bei E. Schrödinger, „Die Gesichtsempfindungen" in: Müller-Pouillet, Lehrb. d. Phys., 11. Aufl., 1926, p. 465 ff.

sei, so ergeben:

$$a\ \text{Rot} + b\ \text{Grün} + c\ \text{Blau} = (a-c)\ \text{Rot} + (b-c)\ \text{Grün} + c\,(\text{Rot} + \text{Grün} + \text{Blau})$$
$$a\ \text{Rot} + b\ \text{Grün} + c\ \text{Blau} = (a-c)\ \text{Rot} + (b-c)\ \text{Grün} + 3\,c\ \text{Weiß},$$

wobei $(a-c)$ Rot + $(b-c)$ Grün den Gehalt an reiner Farbe bilden, während $3\,c$ den Weißgehalt darstellt.

Das gewählte Beispiel behält seine Gültigkeit, wenn man die Grundfarben zyklisch vertauscht; ihre Angabe soll daher zukünftig im allgemeinen wegfallen und lediglich „a" die Menge der am stärksten vertretenen, „b" diejenige der in mittlerer Stärke vorhandenen und „c" diejenige der in kleinster Menge enthaltenen Grundfarbe bedeuten.

Nach der Zerlegung in reine Farbe und Weiß kann man aus ihnen ein Maß für die Sättigung und den Farbton einer Farbe gewinnen. Als Sättigung (S) definiert Helmholtz — nach dem Vorgange Graßmanns — das Verhältnis von reiner Farbe zur Summe von (reiner Farbe + Weißgehalt), also zur Gesamterregung; in Formel:

$$s = \frac{(a-c) + (b-c)}{a+b+c}.$$

Der Farbton ergibt sich als Mischung der beiden am stärksten vertretenen Grundfarben im Verhältnisse der die reine Farbe bildenden Mengen $(a-c):(b-c)$.

Während Farbton und Sättigung nur vom Verhältnisse der Grunderregungen abhängen, ist für die Helligkeit ihr absoluter Wert maßgebend, derart, daß von zwei Farben mit den Grunderregungen $a_1 + b_1 + c_1$ und $a_2 + b_2 + c_2$, bei denen $a_1 = na_2$, $b_1 = nb_2$ und $c_1 = nc_2$ ist, welche also von gleicher Reizart sind, die objektive Intensität der ersten n-mal so groß als diejenige der zweiten Farbe ist. Demgemäß nimmt Helmholtz die Gesamtmenge oder die Farbsumme $(a+b+c)$ einer Farbe als die dritte Komponente an, deren Angabe zur Unterscheidung verschieden heller Farben gleicher Reizart gilt[1]).

4. Das Helmholtzsche Farbendreieck. Noch sinnfälliger tritt der abgeleitete Zusammenhang zwischen den drei Komponenten der Empfindung und den drei Grunderregungen hervor, wenn man ihre Darstellung im sog. Helmholtzschen Farbendreieck betrachtet.

Da die Mannigfaltigkeit des normalen Farbensystems eine dreifache ist, so kann man grundsätzlich die Gesamtheit aller Farben in gesetzmäßiger Folge in einem irgendwie begrenzten Raume, einem „Farbenkörper", anordnen. Verzichtet man auf die geometrische Darstellung einer Komponente, der Helligkeit, so lassen sich alle Farben verschiedener Reizart schon in einer Ebene unterbringen, die man beliebig begrenzen kann. Als besonders zweckmäßige Form einer solchen Farbentafel hat Helmholtz ein gleichseitiges Dreieck gewählt, in dessen Ecken die drei Grunderregungen ihren Platz haben. Wiederum gelten per definitionem diejenigen Farbmengen der drei Grunderregungen als gleich groß, welche gemischt Weiß ergeben. Die geometrisch nicht zum Ausdruck kommende dritte Dimension läßt sich in anschaulicher Weise dadurch ersetzen, daß man jeder Farbe eine „Gewichtszahl" zuschreibt, welche ihrer Helligkeit proportional ist. Die Summe der Gewichtszahlen der zur Mischung benutzten Farben bildet dann die Gewichtszahl der gesuchten Mischfarbe; ihr Ort — und das ist der besondere Vorzug der Dreiecksform etwa vor der des Kreises — ist in bekannter einfacher Weise als Schwerpunkt von zwei oder mehr vorgegebenen Farben zu konstruieren. So ergibt sich sofort die Lage des Weißpunktes: da man Weiß durch Mischung gleicher Mengen der Grundfarben erhält, muß es von allen drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt liegen, also in

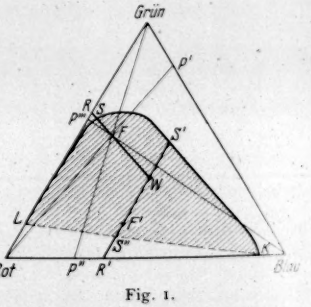


Fig. 1.

seinen Schwerpunkt fallen. Auf den Dreieckseiten liegen alle nur aus einer oder aus zwei Grunderregungen bestehenden, d. h. alle voll gesättigten oder reinen Farben. In Fig. 1 gibt der gekrümmte Teil der Linie, welche die schraffierte Fläche begrenzt, die Lage der Spektralfarben im Farbendreieck an, wie sie durch die Eichung des Spektrums von Arthur König ge-

1) Die Farbensumme kann aber nicht zum Helligkeitsvergleiche von Farben von verschiedener Reizart verwendet werden. Erst durch heterochromatische Photometrie lassen sich die experimentellen Unterlagen für eine Helligkeitsangabe gewinnen, welche unabhängig von der Reizart gilt. Da dieser absolute Helligkeitswert kein notwendiger Bestandteil der Dreikomponententheorie ist, erfolgt seine Einführung und Begründung erst weiter unten.

wonnen wurde; die gestrichelte gerade Grundlinie LK enthält alle durch Mischung der roten und der violetten Endfarbe herstellbaren Farben. Zusammen mit den Spektralfarben stellen sie die gesättigtsten aller wahrnehmbaren Farben dar. Da nach innen, dem Weißpunkt zu, die weniger gesättigten Farben liegen, umfaßt also die schraffierte Fläche, die „reelle Farbfläche", die Gesamtheit aller normalerweise wahrnehmbaren Farben.

Ist F als Ort einer Farbe gegeben, so erhält man das Verhältnis ihrer Grunderregungen, indem man von den Ecken des Dreiecks durch F die Geraden bis zum Schnitt mit den Dreieckseiten in P', P'' und P''' zieht; es verhalten sich dann:

$$FP' : FP'' : FP''' = \text{Rot} : \text{Grün} : \text{Blau}.$$

Will man dagegen Sättigung und Farbton unmittelbar erhalten, so verlängert man WF über F hinaus bis zum Schnittpunkt R mit der Dreieckseite. Da man F als Mischung der reinen Farbe R mit Weiß auffassen kann, ergibt sich folgende Proportion:

$$\frac{WF}{FR} = \frac{\text{reine Farbe}}{\text{Weiß}},$$

$$\frac{WF}{WF+RF} = \frac{\text{reine Farbe}}{\text{reine Farbe} + \text{Weiß}}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{WF}{WR} = \frac{\text{reine Farbe}}{\text{Gesamterregung}} = \text{Sättigung}.$$

Der Schnittpunkt S der Geraden WR mit der Spektralkurve ergibt die zugehörige Wellenlänge als eindeutige Bestimmung des Farbtones. Falls dieser sich aber nicht im ungemischten Spektrum vorfindet — wie die eingezeichnete Purpurfarbe F' — gibt man die Wellenlänge S' als den zugehörigen komplementären Farbton an.

5. Bewährung der Dreifarbentheorie. Die Zurückführung des Komponententripels Farbton-Sättigung-Helligkeit, gleichsam der naturgegebenen psychischen Bestimmungsstücke in unserem Farbenurteile, auf drei Rot-Grün-Blau-Prozesse als die physiologisch gegebenen Komponenten, ist der geniale, in ungekünstelter Weise und völlig streng durchgeführte Grundgedanke der Young-Helmholtzschen Dreifarbentheorie.

Allerdings ist es bisher nicht gelungen, irgend ein organisches Korrelat der Grunderregungen aufzufinden, etwa eine entsprechende Verschiedenheit in der Struktur oder der chemischen Zusammensetzung der Zäpfchen oder eine derart deutbare Unterteilung der Sehnerven, und insofern ist die Annahme hypothetisch. Aber es erscheint zumindestens als fraglich, ob ein solcher Nachweis selbst mit den feinsten, dem Anatomen und dem Physiker zur Verfügung stehenden Mitteln überhaupt erbracht werden kann, auch wenn organische Verschiedenheiten der vermuteten Art tatsächlich bestehen.

Dafür erlaubt diese Annahme eine sehr einfache Erklärung der verschiedenen Formen von Farbenblindheit als Ausfallserscheinungen[1]) bzw. Entartungserscheinungen einzelner oder aller Grundprozesse. In ähnlicher Weise deutet die Theorie als vorübergehende Ermüdung der einzelnen Grundprozesse, denen auch der Farbentüchtige ausgesetzt ist, die unter dem Sammelnamen „Sukzessivkontraste" zusammengefaßten Erscheinungen. Zudem hat sich die Dreikomponententheorie als durchaus tragfähiger Boden für wichtige experimentelle und theoretische Arbeiten erwiesen, deren Ergebnisse sich bisher mühelos und ohne Störung ihres geschlossenen Aufbaues in sie einfügten oder sie erweiterten. Aus der physiologischen Optik erscheinen besonders bemerkenswert die Arbeiten von Arthur König und J. v. Kries. Eine große Reihe wesentlicher experimenteller Probleme ist von F. Exner, K. W. F. Kohlrausch, Cl. Schaefer und deren Schülern durchgeführt oder in Angriff genommen worden. Des weiteren sei auf die wertvollen theoretischen Untersuchungen E. Schrödingers verwiesen.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

Die Young-Helmholtzsche Farbentheorie erklärt in einfacher und einheitlicher Weise, im engen Anschluß an die Erfahrung und nur mit einem Minimum an Hypothesen belastet, viele und wichtige Erscheinungen des Sehens. Darüber hinaus hat sie sich als entschieden entwicklungsfähig gezeigt, so daß sie mit Vorteil als Grundlage einer exakten Farblehre solange dienen kann, als nicht wichtige Tatsachen gefunden werden, welche ihr widersprechen.

II. Kritik der Helmholtzschen Definition der Sättigung.

6. Die Seitzschen Farbenmischversuche. Ergebnisse, welche im Widerspruch zur Young-Helmholtzschen Farbentheorie stünden, glaubt W. Seitz in einer Arbeit „Über die Helmholtz-Exnersche Definition der Sättigung einer Farbe und das Ostwaldsche Farbsystem" gefunden zu haben[2]). In dem ersten Teil dieser Arbeit, der sich mit dem Sättigungsbegriffe befaßt, kommt der Verfasser zu dem Urteile, es müsse „vorerst unentschieden bleiben, ob die Grunderregungskurven zu ungenau bestimmt sind, oder ob die Helmholtz-Exnersche

1) Näheres bei E. Schrödinger, Die Gesichtsempfindungen, l. c. in den §§ 32, 33, 38.

2) Zeitschr. f. Sinnesphysiol. **54**, 146—158, 1923 und Physik. Zeitschr. **23**, 297—301, 1922.

Definition der Sättigung nicht dem tatsächlichen Empfinden entspricht, oder ob die ganze Dreikomponententheorie zu verwerfen ist". Diese weitgehenden Folgerungen erfordern eine Nachprüfung der Seitzschen Angaben, zumal diese nicht nur von Anhängern Ostwalds, wie Schollmayer[1]), als zweifelsfreies Tatsachenmaterial gegen die Helmholtzsche Farbtheorie ins Feld geführt werden, sondern auch in an und für sich exakte, verständlicherweise aber wenig kritische, zusammenfassende Darstellungen wie S. Rösch: „Darstellung der Farbenlehre für die Zwecke des Mineralogen"[2]), übergegangen sind.

Der leitende Gedanke der Seitzschen Untersuchung besteht darin, durch Mischen spektraler Lichter „Farben herzustellen, die nach Helmholtz gleiche Sättigung und gleichen Weißgehalt" haben. Um die Farbe der optischen Mischung festhalten und sie mit Farben anderen Farbtones, aber gleicher Sättigung, später vergleichen zu können, wurde ein weißer Schirm mit dem farbigen Lichte beleuchtet; unmittelbar darunter wurden, mit weißem Lichte beleuchtet, verschiedene Ostwaldsche Farbenblättchen gehalten, die so ausgewählt wurden, bis sie „in Farbe und Helligkeit" dem Lichtgemische möglichst ähnlich waren.

Als weißes Licht wurde Sonnenlicht benutzt, das durch einen Heliostaten aufgefangen und mittels einer Linse auf einen Spalt konzentriert wurde. Durch eine zweite Linse, hinter welcher sich ein Beugungsgitter befand, wurde der Spalt in etwa 1 m Entfernung abgebildet. An der Stelle, an welcher ein Interferenzspektrum erster Ordnung von etwa 13 cm Länge entworfen wurde, befand sich ein Rahmen, in den Blenden geschoben werden konnten. Der Rahmen selbst besaß eine nach Wellenlängen geeichte Millimeterteilung, entsprechend welcher die Blenden aus schwarzem Karton so ausgeschnitten wurden, daß sie nur die gewünschten Spektralbezirke durchließen. Die Breite und Lage der Spalte, welche in die Blenden geschnitten wurden, stellte Seitz durch entsprechendes Ausplanimetrieren der Königschen Grunderregungskurven fest. Und zwar ist allgemein, wenn man jede Farbe aus zwei Spektralbezirken zusammensetzt und beispielsweise der Rotgehalt r gleich dem Grüngehalt g sein soll,

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} J_r\,d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} J_r\,d\lambda = \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} J_g\,d\lambda + \int_{\lambda_4}^{\lambda_5} J_g\,d\lambda$$

worin Jr und Jg die rote bzw. grüne Grunderregung als Funktion der Wellenlänge λ bedeuten. Es wurden zwei Versuchsreihen aufgenommen, welche Lichtgemische in einer Sättigung von etwa 45 Proz. bzw. 16 Proz. enthalten sollten.

Das Ergebnis teilt Seitz in Form zweier Tabellen mit, in denen neben der Angabe des Gehaltes an Rot, Grün und Blau, welcher der Mischung zukommt, das „äquivalente" Farbblättchen in der Ostwaldschen Bezeichnungsweise verzeichnet steht, welches er als gleichaussehend mit dem vom Mischlicht beleuchteten Schirme ausgewählt hatte. (War ein „äquivalentes" Pigment in Strenge nicht im Farbatlasse vorhanden, so suchte der Verfasser zwei oder vier möglichst ähnlich aussehende Farbflächen derart aus, daß man die gesuchte Farbe im Hinblick auf Farbton, Sättigung und Helligkeit zwischen die gewählten Pigmente interpolieren konnte.) Nach seiner Ansicht genügt „ein Blick auf die Blättchen . . . . ., die nach der Helmholtz-Exnerschen Theorie gleiche Sättigung und gleiche Weißlichkeit haben sollen, um zu erkennen, daß dies absolut nicht der Fall ist". Anschließend kommt der Verfasser zu dem eingangs dieses Kapitels erwähnten Urteile, das zwischen einer Ablehnung der Königschen Grunderregungskurven, der Graßmann-Helmholtzschen Definition der Sättigung oder gar der Dreikomponententheorie überhaupt schwankt.

Angesichts so weitgehender Folgerungen erscheint eine Prüfung der Seitzschen Angaben geboten, zumal seine Versuchsanordnung vielfach zu Fehlern Gelegenheit gibt, er selbst aber keine Schätzung des wahrscheinlichen Fehlers angibt.

7. Die Fehlerquellen der Seitzschen Mischversuche. Die zur Mischung verwendeten Spektralbereiche gibt Seitz bis auf 0,5 $\mu\mu$ genau an. Unter Berücksichtigung der von ihm mit 13 cm angegebenen Länge des benutzten Spektrums ist das aber eine Genauigkeit von 0,2 mm—0,3 mm, die sich mit Hilfe von Metallblenden und Einstellung mittels Mikrometerschraube leicht erzielen läßt. Ob dasselbe zu erreichen ist, wenn man aus Karton geschnittene Blenden benutzt, welche in einen mit Millimeterteilung versehenen Rahmen geschoben werden, erscheint auch bei Voraussetzung größter persönlicher Sorgfalt und experimenteller Geschicklichkeit immerhin zweifelhaft.

Eine weitere Fehlerquelle erwähnt Seitz selbst. Die Mischung des bunten Lichtes geschah durch Reflexion an einem Hohlspiegel, welcher „den ausgeblendeten Rest des Spektrums in 182 cm Abstand auf einem Papierschirme zu einem gleichmäßig gefärbten Viereck von etwa 3 qcm Größe vereinigte. Ließ man das volle Spektrum ohne Verwendung der Blenden auf den Spiegel fallen, so zeigte das durch die Wiedervermischung entstandene Weiß vermutlich

1) K. Schollmayer, Physik. Zeitschr. **28**, 504, 1927.

2) Zeitschr. f. Fortschritte d. Mineralogie, Kristallographie u. Petrographie, **14**, 73—234, 1929.

infolge selektiver Absorption am Spiegel einen bemerkbaren Stich ins Grünblaue"[1]).

Möglicherweise ist diese merkbare grünblaue Verfärbung teilweise oder ganz auf eine Bevorzugung entsprechender Spektralbezirke im Gitterspektrum zurückzuführen. Da der Verfasser über eine Untersuchung der Energieverteilung in dem von ihm benutzten Gitterspektrum nichts sagt, so läßt sich dies nicht nachträglich entscheiden.

Eins ist aber völlig sicher, daß nämlich eine durch die Apparatur bewirkte „bemerkbare" Färbung des weißen Lichtes — es ist hierbei an und für sich gleichgültig, ob Gitter oder Spiegel schuld daran sind — denselben Enderfolg hat, wie wenn man das Sonnenlicht durch Licht anderer spektraler Verteilung ersetzte. Dann ist es aber anderseits klar, daß man den Farbmischungen, welche Seitz vornimmt, andere Werte zuschreiben muß, als es der Verfasser tut, indem er ihnen die für Sonnenlicht berechneten Königschen Grunderregungskurven ohne entsprechende Korrektur zugrunde legt. Eine solche Korrektur könnte natürlich nur gewonnen werden, indem man die Energieverteilung des Sonnenlichtes im benutzten Spektrum erster Ordnung untersucht, nachdem es durch den in Frage stehenden Spiegel reflektiert wurde; wenigstens kann man sich die Reflexion am Spiegel nur ersparen, wenn man zuvor festgestellt hat, daß er keine merkbare Selektivität besitzt. Anders ausgedrückt würde derselbe Sachverhalt lauten: Die wegen der Selektivität des Gitters oder des Spiegels notwendige Korrektion der Grundempfindungskurven ist eine Funktion der Wellenlänge, die man nur durch spektrale Analyse des auf den Auffangschirm gelangenden weißen Lichtes und Vergleich mit unverändertem Sonnenlicht bestimmen kann. Statt dessen bemerkt Seitz, er habe, um den „bemerkbaren Stich ins Grünblaue zu kompensieren, dem Papierschirm eine leicht gelbliche Färbung gegeben". Das ist jedoch deswegen nicht zulässig, weil derselbe gelbe Ton durch objektiv verschiedene Remission des Lichtes dargestellt werden kann, während nur eine einzige ganz bestimmte Remissionskurve die durch die Selektivität von Gitter oder Spiegel veränderte spektrale Zusammensetzung des Sonnenlichtes objektiv richtig ausgleichen könnte, so daß in dem vom Schirm reflektierten Lichte wieder die ursprüngliche spektrale Energieverteilung herrscht. Selbstverständlich sieht der tatsächlich gelbliche Schirm dann in dem bläulichen Lichte „weiß" aus, d. h. er ist nicht mehr von einem weißen Schirme zu unterscheiden, welcher von unverändertem Sonnenlichte bestrahlt wird. Derselbe Eindruck aber wird durch jeden Schirm erzielt, der trotz abweichender Remissionskurve dieselbe Farbe wie der eben erwähnte hat, während natürlich in dem von ihm zurückgeworfenen Lichte eine völlig andere spektrale Energieverteilung herrscht wie in dem unveränderten Sonnenlichte.

Ohne auf derartige Erwägungen einzugehen, macht Seitz lediglich die folgende Bemerkung: „Im übrigen weichen die Resultate, die mit einem rein weißen Schirm erzielt wurden, von dem so (d. h. mit gelblichem Schirm) gefundenen prinzipiell nicht ab". Hieraus könnte man schließen, daß die unerwünschte Veränderung, welche das Licht erleidet und die durch seine Verfärbung offenbar wird, zu gering ist, um die Ergebnisse irgendwie merklich zu beeinflussen. Dem steht die Erfahrung gegenüber, daß man schon verhältnismäßig große Mengen von Farbe dem Weiß zusetzen muß, bevor es überhaupt einen merkbaren bunten Stich bekommt[1]). Man kann also wohl kaum auf eine belanglose Beeinflussung der Energieverteilung im Sonnenlichte schließen. Wenn trotzdem die unter abweichenden Bedingungen erhaltenen Resultate „prinzipiell nicht voneinander abweichen", so bleibt als letzte Möglichkeit nur eine Erklärung: die Methode, welche Seitz anwendet, ist zu unempfindlich. Woran das im Einzelnen liegt, ist seinen Angaben über die Versuchsanordnung nicht zu entnehmen. Es ist jedoch bekannt, daß das Auge für Unterschiede in der Sättigung viel weniger empfindlich ist als für Unterschiede im Farbtone[2]). In der Seitzschen Arbeit würden aber gerade Irrtümer hinsichtlich der Sättigung ins Gewicht fallen und als subjektive Fehlerquellen zu den vorerwähnten objektiven hinzukommen.

8. Experimentelle Prüfung der Seitzschen Ergebnisse. Eine Aufzählung von Fehlerquellen allein läßt noch keinen zwingenden Schluß auf die Größe der tatsächlich sich ergebenden Fehler zu; möglicherweise hält der Gesamtfehler sich innerhalb einer erträglichen Fehlergrenze. Darum war eine experimentelle Nachprüfung der Seitzschen Arbeit geboten.

1) Von uns gesperrt.

1) „Mischt man die Vollfarbe mit Weiß, so sind kleine Mengen Weiß in der Vollfarbe deutlich sichtbar, während reinem Weiß große Mengen Vollfarbe zugemischt werden können, ehe sie merklich werden." W. Ostwald, Physikal. Farbenlehre, 200, 1919.

2) Dies geht aus einer bei Exner gemachten Arbeit hervor (M. Gottlieb, Wiener Berichte, IIa, **126**, 1299, 1917), und Exner selbst hat auf dieser Erfahrungstatsache geradezu eine Methode zum Helligkeitsvergleiche verschiedener Farben begründet. (F. Exner, Wiener Berichte IIa, **127**, 1918).

Tabelle I.

	Rot	Blau	Grün	Sättigung	
Seitz	20,35 Proz.	17,24 Proz.	8,66 Proz.	20,27 : 46,25 = 43,8 Proz.	Mischlicht
Kohlrausch	25,8 „	18,6 „	14,9 „	14,6 : 59,3 = 24,6 „	33 *pa*
Schaefer u. Pese	30,4 „	22,9 „	16,8 „	19,6 : 70,1 = 27,9 „	33 *pa*

Tabelle II.

	Rot	Blau	Grün	Sättigung	
Seitz	35 Proz.	29,7 Proz.	14,9 Proz.	43,8 Proz.	Mischlicht
Kohlrausch	25,8 „	18,6 „	14,9 „	24,6 „	33 *pa*
Schaefer u. Pese	26,9 „	20,2 „	14,9 „	27,9 „	33 *pa*

Den Gesamtfehler erhält man unmittelbar, indem man die von Seitz angegebenen äquivalenten Farbblättchen in bekannter und schon mehrfach beschriebener Weise analysiert, aus ihrem derart gefundenen Gehalt an Rot, Grün und Blau die ihnen zukommende Sättigung berechnet und die so erhaltenen Werte mit den Angaben vergleicht, welche Seitz über die Zusammensetzung der entsprechenden spektralen Mischfarbe macht.

Als Beispiel sei Farbblättchen 33 *pa* genannt, da dieses zufällig auch noch von K. W. F. Kohlrausch ausgemessen wurde[1]). Die von ihm gefundenen Werte für die Grunderregungen des Pigments 33 *pa* sind in Tab. I eingetragen, ebenso wie die von uns gemessenen Werte für dasselbe Farbblättchen. Außerdem enthält die Tabelle die von Seitz angegebenen Werte, aus welchen er diejenige Mischfarbe erzeugt, für die er das Pigment 33 *pa* als äquivalent hinsichtlich des Farbtones bezeichnet.

Beim Vergleich der Ergebnisse ist zu berücksichtigen, daß man eine Übereinstimmung der absoluten Werte nicht erwarten darf, da Kohlrausch weißen Karton, wir selbst aber Barytweiß als Vergleichsweiß benutzten. Ein bloßer Unterschied der Albedos bei den verschiedenen Weißpigmenten, der sich lediglich in einer entsprechenden Änderung der Helligkeitswerte äußert, spielt in diesem Falle gar keine Rolle, da es nur auf die relativen Werte der Grunderregungen ankommt, durch deren Verhältnis Farbton und Sättigung bestimmt werden. Dies ist in Tab. II derart geschehen, daß die Werte von Kohlrausch unverändert bleiben, die Werte von Seitz und Pese aber auf den Kohlrauschschen Grünwert bezogen sind. Aus der Zusammenstellung in Tab. I läßt sich auch der Farbton berechnen; $(a-c) + (b-c)$ ergeben den Gehalt an reiner Farbe, das Verhältnis $(a-c) : (b-c)$ den Farbton, wobei wiederum $a > b > c$ den drei Grunderregungen entsprechen und in vorliegendem Falle a die Quantität der roten, b die der blauen und c diejenige der grünen Grunderregungen bezeichnen.

Der Gehalt an reiner Farbe beträgt für das Mischlicht (Seitz):

20,35 Proz. — 8,66 Proz. = **11,7** Proz. Rot und
17,24 Proz. — 8,66 Proz. = **8,6** Proz. Blau;

für das Blättchen 33 *pa* nach Kohlrausch:

25,8 Proz. — 14,9 Proz. = **10,9** Proz. Rot und
18,6 Proz. — 14,9 Proz. = **3,7** Proz. Blau

und nach uns:

30,4 Proz. — 16,8 Proz. = **13,6** Proz. Rot und
22,9 Proz. — 16,8 Proz. = **6,1** Proz. Blau.

so daß der Farbton aus Rot und Blau besteht, und zwar kommen auf einen Teil Blau:

nach Seitz:

11,7 Proz. : 8,6 Proz. = 1,36 Teile Rot,

nach Kohlrausch:

10,9 Proz. : 3,7 Proz. = 2,94 „ „

und nach uns:

13,6 Proz. : 6,1 Proz. = 2,23 „ „ .

Bei der Beurteilung der verschiedenen Angaben ist zu berücksichtigen, daß spektralphotometrische Messungen im blauen und violetten Gebiete wegen der geringen Helligkeit besonders schwierig und demgemäß mit einem größeren Fehler als die Messungen im langwelligen Teile des Spektrums behaftet sind, und daß ferner den Angaben verschiedene Exemplare des Farbatlasses zugrunde liegen. Die Messungen von Kohlrausch und von uns stimmen trotzdem im Farbtone einigermaßen, in der Sättigung gut zusammen, während das Seitzsche Mischlicht viel blauer als das ihm im Farbtone „äquivalente" Farbblättchen 33 *pa* ist. Die erheblichen Abweichungen, welche die Seitzschen Angaben hinsichtlich der Sättigung zeigen, liegen in der

1) K. W. F. Kohlrausch, Physik. Zeitschr. **21**, 396, 1920.

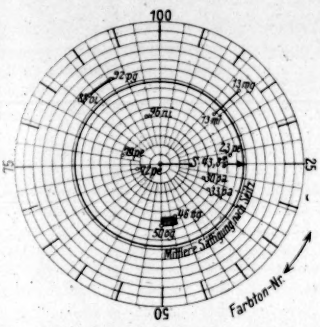


Fig. 2.

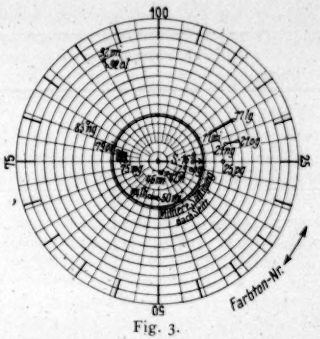


Fig. 3.

von ihm bezeichneten Richtung, da er das Farbblättchen 33 *pa* als „noch zu weißlich" bezeichnet, ein gesättigteres desselben Farbtones jedoch im Ostwaldschen Atlas nicht vorhanden ist.

Entsprechend den beiden Versuchsreihen von Seitz, von denen die erste Farbmischung in einer Sättigung von etwa 44 Proz., während die zweite noch weißlichere zu etwa 16 Proz. gesättigte Farben enthalten soll, sind seine Angaben und die Ergebnisse der Analyse in den Tab. III und IV gegenübergestellt. Um gerade die Abweichungen in der Sättigung, welche hier besonders interessieren, anschaulich zu machen, wurden Polarkoordinaten zur graphischen Darstellung der Ergebnisse aus Tab. III und IV gewählt. In den Figg. 2 und 3 wird die Richtung der Vektoren durch den Farbton (in der Einteilung und Bezeichnungsweise des hundertteiligen Farbkreises), die Sättigung durch die Länge der Vektoren bezeichnet. Den Mittelwerten der ersten und zweiten Seitzschen Versuchsreihe entsprechen die Kreise, den gefundenen Sättigungswerten der äquivalenten Farbblättchen die eingezeichneten mit ihren Ostwaldschen Kennziffern versehenen Punkte. Dort, wo der tatsächliche Wert zwischen zwei Farbblättchen noch zu interpolieren ist, sind die gefundenen Grenzwerte durch eine Gerade verbunden, wenn die angegebenen Farbblättchen von verschiedener Sättigung aber gleichem Farbtone sind. Unterscheiden sich jedoch die Grenzwerte sowohl durch ihre Sättigung wie auch durch ihren Farbton, so bilden sie Eckpunkte eines schraffiert gezeichneten Ringsektors, auf dessen Fläche der zu interpolierende Punkt liegt. Bei der Beurteilung der in Tab. III enthaltenen Gegenüberstellung sind das dritte und vierte Mischlicht zu Gunsten von Seitz nicht herangezogen worden, da die ihnen äquivalenten Pigmente nach Seitz' eigener Angabe „noch zu weißlich sind", stärker gesättigte Farbblättchen desselben Farbtones im Ostwaldschen Atlasse jedoch fehlen. Unter den

Tabelle III.

Lfd. Nr.	Mischlichter nach Seitz				Äquivalente Pigmente	Analyse der äquivalenten Pigmente			
	Rot	Blau	Grün	Sättigung		Rot	Blau	Grün	Sättigung
1	19,76	8,59	17,76	44,1	13 *mg* 13 *mi*	14,92 10,32	4,86 5,10	13,76 9,56	56,6 38,75
2	22,08	8,80	15,21	42,7	23 *pe*	24,88	11,64	18,44	36,5
3	24,60	12,81	8,53	44,3	30 *pa*[1]	32,64	21,12	18,44	23,4
4	20,35	17,24	8,66	43,8	33 *pa*[1]	30,40	22,92	16,84	28,0
5	10,24	27,10	8,45	44,7	46 *ng* 50 *og*	12,72 7,90	23,50 17,62	11,42 7,42	28,1 32,4
6	8,74	22,0	15,18	43,0	72 *pe*	9,02	10,32	11,26	11,6
7	8,75	17,62	19,38	42,6	79 *pe*	12,68	17,08	17,44	19,4
8	16,64	8,64	21,14	44,2	88 *oi* 92 *pg*	7,68 13,52	3,42 5,50	9,20 14,64	50,5 51,0
9	17,43	8,49	20,40	45,1	96 *ni*	12,78	8,68	13,72	26,0

Als Mittelwert für die Sättigung der Mischlichter ergibt sich 43,8 Proz.

1) Angabe von Seitz: „Das Pigment ist noch zu weißlich."

Tabelle IV.

l.fd. Nr.	Mischlichter nach Seitz				Äquivalente Pigmente	Analyse der äquivalenten Pigmente			
	Rot	Blau	Grün	Sättigung		Rot	Blau	Grün	Sättigung
1	15,61	11,49	13,85	15,8	17 *lg*	13,71	7,71	11,95	30,7
					17 *mi*	9,10	6,11	8,27	21,9
2	17,23	11,45	12,98	16,15	21 *ng*	10,15	6,20	8,37	24,8
					21 *og*	11,64	6,44	9,17	29,1
3	17,55	11,45	12,02	16,25	25 *pg*[1])	12,14	7,47	9,53	23,1
4	15,91	13,48	11,53	15,5	29 *og*	12,33	9,24	9,92	12,0
5	12,51	17,13	11,42	16,55	42 *ni*	7,58	6,74	7,01	5,2
6	11,52	17,83	11,69	15,8	46 *mi*	7,82	7,82	7,33	4,3
7	11,52	16,57	12,98	15,85	50 *mi*	7,27	10,31	7,52	13,1
					54 *lh*	8,66	12,17	8,69	12,6
8	11,44	13,94	15,59	16,2	75 *mg*	12,18	14,54	14,53	11,4
					79 *oi*	8,04	7,31	10,32	14,6
9	12,09	11,50	17,44	15,9	83 *ng*	14,27	9,94	17,41	28,3
10	15,27	11,48	14,17	15,85	92 *mi*	12,19	6,34	13,37	40,4
					92 *ol*	8,78	4,78	9,59	38,1

Als Mittelwert für die Sättigung der Mischlichter ergibt sich 16,0 Proz.

verbleibenden sieben Mischlichtern dieser Versuchsreihe besteht nur für das erste eine gute, für zwei weitere — das zweite und achte der Tabelle — nur angenäherte Übereinstimmung zwischen den Werten, welche Seitz als ihre Zusammensetzung angibt, und denen, welche sich durch Analyse der von ihm als äquivalent bezeichneten Aufstriche ergeben. Die Sättigung des ersten Mischlichtes ($S = 44{,}1$ Proz.) liegt gut zwischen den Sättigungswerten der äquivalenten Blättchen *mg* 13 (56,6 Proz.) und *mi* 13 ($S = 38{,}75$ Proz.), zwischen denen sie zu interpolieren ist. In Annäherung wird der Sättigungswert des zweiten Mischlichtes ($S = 42{,}7$ Proz.) durch die Analyse des äquivalenten Farbblättchen 23 *pe* bestätigt, dessen Sättigung sich zu $S = 36{,}5$ Proz. ergibt, und ebenso die Sättigung des 8. Mischlichtes durch die Analyse der äquivalenten Pigmente 88 *oi* ($S = 50{,}5$ Proz.) und 92 *pg* ($S = 51$ Proz.). Dagegen ergibt die Messung der dem 5. Mischlichte ($S = 44{,}7$ Proz.) äquivalenten Aufstriche 46 *ng* ($S = 28{,}1$ Proz.) und 50 *og* ($S = 32{,}4$ Proz.) einen mittleren Sättigungswert von etwa 30 Proz., von welchem der Seitzsche Wert um rund 50 Proz. abweicht. Das bedeutet bereits eine wesentliche Überschreitung der zulässigen Fehlergrenze. Noch größer sind die Differenzen beim 6., 7. und 9. Mischlicht, wie aus Tab. III und der zugehörigen Fig. 2 ersichtlich ist.

Die genannten Abweichungen genügen, um die Unsicherheit der Seitzschen Methode und damit die Hinfälligkeit der von ihm aus seinen Ergebnissen gezogenen Folgerungen darzutun. Aber auch die Tab. IV, in welcher in entsprechender Weise die Zusammensetzung der Mischlichter und die Analyse der äquivalenten Farbblättchen für die zweite Seitzsche Versuchsreihe gegenübergestellt sind, zeigt nur bei 3 von 10 Mischlichtern — nämlich den Nummern 4, 7 und 8 — eine ungefähre Übereinstimmung. Beim 5. und 6. Mischlicht ist der Seitzsche Sättigungswert zu groß, in allen übrigen Fällen zu klein angegeben. Am größten ist die Differenz beim 10. Mischlicht, wo einem Seitzschen Werte von $S = 15{,}85$ Proz. ein Wert von etwa 39 Proz. gegenübersteht, da für die äquivalenten Pigmente 92 *mi* und 92 *ol* die Werte $S = 40{,}4$ Proz. bzw. $S = 38{,}1$ Proz. gemessen wurden. Das die Seitzschen Mischversuche ablehnende Urteil enthält allerdings noch eine Voraussetzung, nämlich die Annahme, daß die Einfärbung des Ostwaldschen Atlasses von Fall zu Fall höchstens geringfügige Schwankungen aufweist, daß also innerhalb eines kleinen Fehlerbereiches den einzelnen Kennziffern immer Farbblättchen desselben Farbtones, gleicher Sättigung und Helligkeit zugeordnet sind. Könnte man dieser Behauptung Ostwalds keinen Glauben schenken, so wäre der ganze Sinn des Farbatlasses hinfällig. Begründete Zweifel in dieser Hinsicht sind bisher nicht laut geworden, doch erfordert die Lichtempfindlichkeit vieler Farbblättchen besondere Sorgfalt, um ihre Veränderung während des und durch den Gebrauch zu verhindern. Bei der Aufnahme der Remissionskurven wurde auf diesen Nachteil des Farbatlasses Rücksicht genommen, indem die Farbblättchen nur während der kurzen Dauer der Einstellungen beleuchtet wurden, sonst aber gegen die Einwirkungen von künstlichem und natürlichem Licht geschützt waren.

9. Kritik der Seitzschen Beweisführung. Abgesehen von der experimentellen

1) „Noch zu weißlich" nach Seitz.

Widerlegung der Seitzschen Angaben muß die Art seiner Beweisführung Bedenken erregen. Er schließt etwa folgendermaßen:

Angenommen, die Helmholtzsche Definition der Sättigung ist richtig, so müssen Farben gleicher Helmholtzscher Sättigung unserem Auge gleich gesättigt erscheinen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Voraussetzung ad absurdum geführt und die Helmholtzsche Sättigungsdefinition mithin abzulehnen. Während man nun erwarten sollte, die Prüfung der eigentlichen Frage, wie sich nämlich unsere Empfindung gegenüber Pigmenten von gegebener Helmholtzscher Sättigung verhält, würde in eingehender Weise erfolgen, wird nach der mühevollen Zusammensetzung und Bestimmung der Mischfarben die ganze Untersuchung mit zwei Sätzen erledigt: „Ein Blick auf die Blättchen der 6. Reihe, die nach der Helmholtz-Exnerschen Definition gleiche Sättigung und gleichen Weißgehalt haben sollen, genügt, um zu erkennen, daß dies absolut nicht der Fall ist. Grüngelb bis Orange und ebenso Blauviolett bis Blau erscheinen zu sehr gebrochen, Rot viel zu gesättigt im Vergleich zu den anderen Farben."

Leider aber kennen wir erst sehr wenige Gesetze, welche uns die Abhängigkeit der Empfindungen von den objektiven Reizen angeben. Oft können wir bisher nur ganz allgemeine Aussagen machen, deren Richtigkeit allerdings außer Frage steht. Hierzu gehört u. a. die Erkenntnis, daß die Empfindungen Farbton, Sättigung, Helligkeit, nicht „rein", also voneinander getrennt, auftreten können, sondern sich vielmehr in bisher noch nicht genauer untersuchter Weise gegenseitig beeinflussen. Daß sich der Farbton bei starker Erhöhung oder Verringerung der Intensität ändert, kann hier außer acht bleiben, da wir uns von vornherein auf „normale Helligkeit" beschränkt haben. Dagegen ist die von Ostwald und vielen anderen Beobachtern angegebene Erscheinung bemerkenswert, daß sich selbst bei einer Beleuchtung von mittlerer Helligkeit viele Farbtöne ändern, wenn man ihnen Weiß zumischt, also ihre Sättigung ändert. In diesem Falle erhält beispielsweise Blau einen deutlichen Stich ins Rote. Anderseits bereiten Verschiedenheiten in der Reizart, also in Farbton und Sättigung, außerordentliche Schwierigkeiten bei einem direkten Helligkeitsvergleiche. Es genügt in diesem Zusammenhange, auf die große Anzahl heterochromatischer Untersuchungsmethoden hinzuweisen, welche von hervorragenden Physikern und Physiologen entwickelt worden sind.

In allen Untersuchungen, welche Gesetzmäßigkeiten einer einzelnen Empfindung betreffen, ist daher die Hauptschwierigkeit die einwandfreie Ausschaltung jeder Beeinflussung durch andere Merkmale unseres Farbenurteils. So wurde in der früher erwähnten Arbeit von Gottlieb, in welcher die Empfindlichkeit des Auges für Sättigungsunterschiede bestimmt wurde, immer eine Farbe gegen eine andere von gleichem Farbtone und variabler Sättigung photometriert, während durch eine besondere experimentelle Anordnung für gleiche Helligkeit der beiden Pigmente gesorgt wurde.

Demnach erscheint es angebracht, die Empfindung, welche wir beim „ersten Blick" auf die Farbblättchen haben, etwas kritisch zu beurteilen. Das bedeutet keine Ablehnung der Empfindung; das Auge bleibt selbstverständlich auch weiterhin „der einzige Richter in Farbenangelegenheiten". Nur ist es falsch — wie es Schollmayer[1]) in seiner „Richtigstellung von Einwänden gegen Ostwalds Farbenlehre" tut — dieses Zitat zur Bekräftigung der Seitzschen Beweisführung heranzuziehen. Seitz hat keinerlei Vorkehrungen getroffen, um eine „reine", d. h. durch keinerlei andere Umstände — etwa Helligkeit — beeinflußte Sättigungsempfindung garantieren zu können. Vor der Aufgabe, Farben verschiedenen Farbtones und verschiedener Helligkeit durch direkten Vergleich im Hinblick auf ihre Sättigung zu schätzen, steht unsere Empfindung genau so ratlos wie vor der Aufgabe, heterochromatische Helligkeiten ohne alle Hilfsmittel und unmittelbar vergleichend zu bestimmen: es können nur ganz grobe Unterschiede festgestellt werden und auch dann bedarf es strenger Kritik, um Urteilstäuschungen durch nicht in Frage stehende Eigenschaften der Farbe auszuschließen. Sehr gut hat Schrödinger diesen Sachverhalt formuliert: „. . . . . unseren unmittelbaren Gefühl erscheint der Eindruck eines bestimmten Farbfeldes als eine durchaus einheitliche Empfindung, aus der wir nicht imstande sind, einen einzelnen Empfindungsbestandteil abzulösen, gesondert zu beurteilen und mit dem analogen Bestandteil einer anderen Farbempfindung zu vergleichen"[2]). Um bei der Betrachtung des Seitzschen Urteils über die Sättigung seiner äquivalenten Farbblättchen noch nachträglich eine kritische Stellungnahme zu ermöglichen, wurde ihre Helligkeit in relativen Einheiten berechnet. Dies geschah durch Multiplikation der Grunderregungen eines jeden Pigmentes mit den entsprechenden sog. spezifischen Helligkeitskoeffizienten, deren Werte nach Messungen von F. Exner zu $\varrho = 1$,

1) Schollmayer, Physik. Zeitschr. **28**, 504, 1927.

2) E. Schrödinger, l. c.

Tabelle V.

Pigmente	Rot	Blau	Grün	Farbsumme	ϱ · Rot	β · Blau	γ · Grün	Helligkeit	Sättigung nach Helmholtz
13 *mg*	14,9	4,9	13,8	33,6	14,9	0,1	10,4	25,4	56,6
13 *mi*	10,3	5,1	9,6	25	10,3	0,1	7,3	17,7	38,8
23 *pe*	24,9	11,6	18,4	54,9	24,9	0,3	13,9	39,1	30,5
30 *pa*	32,6	21,1	18,4	72,1	32,6	0,5	13,9	47,0	23,4
33 *pa*	30,4	22,9	16,8	70,1	30,4	0,6	12,7	43,7	28
46 *ng*	12,7	23,5	11,4	47,6	12,7	0,6	8,6	21,9	28,1
50 *og*	7,9	17,6	7,4	32,9	7,9	0,4	5,6	13,9	32,4
72 *pe*	9	10,3	11,3	30,6	9	0,2	8,6	17,8	11,6
79 *pe*	12,7	17,1	17,4	47,2	12,7	0,4	13,2	26,3	19,4
88 *oi*	7,7	3,4	9,2	20,3	7,7	0,1	7	14,8	50,5
92 *pg*	13,5	5,5	14,6	33,6	13,5	0,1	11	24,6	51
96 *ni*	12,8	8,7	13,7	35,2	12,8	0,2	10,4	23,4	26

Tabelle VI.

Pigmente	Rot	Blau	Grün	Farbsumme	ϱ · Rot	β · Blau	λ · Grün	Helligkeit	Sättigung nach Helmholtz
17 *lg*	13,7	7,7	12	33,4	13,7	0,2	9,1	23,0	30,7
17 *mi*	9,1	6,1	8,3	23,5	9,1	0,2	6,3	15,6	21,9
21 *ng*	10,2	6,2	8,4	24,8	10,2	0,2	6,3	16,7	24,8
21 *og*	11,6	6,4	9,2	27,2	11,6	0,2	7	18,8	29,1
25 *pg*	12,1	7,5	9,5	29,1	12,1	0,2	7,2	19,5	23,1
29 *og*	12,3	9,2	9,9	31,4	12,3	0,2	7,5	20,0	12,0
42 *ni*	7,6	6,7	7,0	21,3	7,6	0,2	5,3	13,1	5,2
46 *mi*	7,8	7,8	7,3	22,9	7,8	0,2	5,5	13,5	4,3
50 *mi*	7,3	10,3	7,5	25,1	7,3	0,3	5,7	13,3	13,1
54 *lk*	8,7	12,2	8,9	29,8	8,7	0,3	6,7	15,7	12,6
75 *mg*	12,2	14,5	14,5	41,2	12,2	0,4	11,0	23,6	11,4
79 *oi*	8,0	7,3	10,3	25,6	8,0	0,2	7,8	16,0	14,6
83 *ng*	14,3	9,9	17,4	41,6	14,3	0,2	13,2	27,7	28,3
92 *mi*	12,2	6,3	13,4	31,9	12,2	0,2	10,1	22,5	40,4
92 *ol*	8,8	4,8	9,6	23,2	8,8	0,1	7,3	16,2	38,1

$\gamma = 0{,}756$ und $\beta = 0{,}024$ angenommen wurden[1]). Die Ergebnisse sind in die Tab. V und VI eingetragen.

Was das oben zitierte Seitzsche Urteil selbst anlangt, so wird man ihm — wenigstens soweit es sich um seine erste Versuchsreihe handelt (Tab. III und V) — im großen ganzen „rein empfindungsgemäß" beipflichten können. Den stärksten Eindruck machen zweifellos die roten Pigmente (23 *pe*, vor allem aber 30 *pa* und 33 *pa*), am mattesten erscheinen Blauviolett und Blau 46 *ng* und 50 *og*), sowie Grüngelb (88 *oi*, 92 *pg*) und 96 *ni*), während Grün (72 *pe* und 79 *pe*) in der Mitte zwischen Rot und den anderen Farben hinsichtlich dessen steht, was Seitz offenbar als „Sättigung" empfindet. Hiergegen wäre, abgesehen von den bereits angedeuteten grundsätzlichen Bedenken, lediglich die Stellung des mittleren Grüngelbs 92 *pg* zu bemängeln, das offenbar dem Grün 72 *pe* und 79 *pe* näher steht als seinen auffallend blassen Nachbarblättchen 88 *oi* und 96 *ni*.

Zeichnet man Helligkeit und Sättigung als Funktionen der Farbe, wie es in Fig. 4 für die Werte der Tab. V geschehen ist, so zeigt sich eine nahezu völlige Übereinstimmung

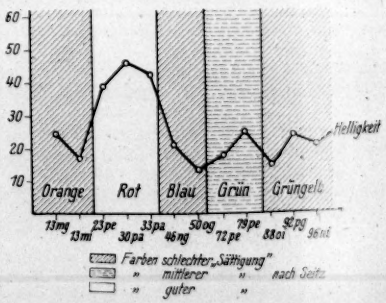


Fig. 4.

[1]) Auf die grundsätzliche Berechtigung einer solchen Berechnung der Helligkeit wird an späterer Stelle ausführlicher eingegangen werden; experimentell ist sie durch Arbeiten von Exner, Kohlrausch, Schaefer erwiesen.

der Stärke der Seitzschen „Sättigungsempfindung" mit den Helligkeitswerten. Hierbei ist noch zu beachten, daß man im allgemeinen nicht die absolute Helligkeit einer Farbe beurteilt. Unser Empfinden berücksichtigt, daß manche Farben an und für sich sehr dunkel sind, vor allem Blau, aber auch Violett und Blaugrün. Hierin dürfte der richtige Kern der sog. „Schwarzvalenz" liegen, welche die erwähnten „kalten" Farben nach Hering haben. Umgekehrt erwartet unsere Empfindung von den sog. „warmen" Farben, vor allem Gelb, Orange, Rot, von vornherein eine größere Helligkeit. So kommt es, daß Orange 13 *ni* und 13 *mg*, welche annähernd dieselbe absolute Helligkeit wie Grün 79 *pe* und 72 *pe* besitzen, dennoch bedeutend matter erscheinen, weil eben Orange an und für sich heller ist als Grün [1]). Die Schwankungen im relativen Weißgehalte werden anscheinend gänzlich überdeckt durch die erheblichen Schwankungen in der Helligkeitsempfindung. Daraus darf man freilich nicht der Helmholtzschen Definition einen Vorwurf machen; dies scheint vielmehr auf eine Inferiorität der Sättigungsempfindung gegenüber der Helligkeitsempfindung hinzudeuten. Übrigens geht dies auch aus der bereits erwähnten Gottliebschen Arbeit hervor, da nach ihr die Empfindlichkeit für Änderungen der Sättigung bei dunklen Farben sehr gering ist, d. h. also: ein Weißzusatz, welcher beispielsweise die Sättigung von 88 *oi* erheblich verringerte, würde am Aussehen dieses Pigmentes nur wenig ändern.

Das angeführte Seitzsche Urteil bezieht sich ebenso auf die Pigmente der zweiten Versuchsreihe. Hierbei ist es aber kaum möglich, seiner Einteilung zu folgen. Mehrere Versuchspersonen, welchen diese Farbblättchen mit der Aufforderung vorgelegt würden, sie empfindungsgemäß in Gruppen ähnlicher Sättigung zu ordnen, gaben Urteile ab, wie beispielsweise: die Farben der zweiten Versuchsreihe seien alle „ganz matt" oder „grau in grau" oder „völlig ungesättigt", „nur das grüne Farbblättchen 83 *ng* steche durch seine lebhafte, kräftige Farbe deutlich ab, die übrigen könne man hinsichtlich ihrer Sättigung nicht unterscheiden". Das Farbblättchen 83 *ng* ist absolut genommen das hellste der ganzen Versuchsreihe. Das ihm an Helligkeit nahekommende Blättchen 75 *mg* ist deutlich weißlich, seine Sättigung beträgt nur 11,4 Proz., das orangefarbene Blättchen 17 *lg* erscheint wegen seiner kleinen relativen Helligkeit bräunlich. Da das vorliegende Material aber nicht ausreichend erscheint, um genauere Aussagen zu machen, so sei zusammenfassend nur festgestellt, daß die von Seitz angenommene reine Sättigungsempfindung tatsächlich eine Funktion von Sättigung und Helligkeit ist, worin die Helligkeit — richtiger: die relative Helligkeit — bei direktem Vergleiche verschiedener Farben unter Umständen durchaus überwiegt.

1) Hinsichtlich einer genaueren Definition dieser „relativen Helligkeit" sei auf die gedankenreiche Arbeit von S. Roesch, „Die Kennzeichnung der Farben", Physik. Zeitschr. **29**, 83, 1928 verwiesen.

III. Über Weißlichkeit und Sättigung in der Ostwaldschen Farbensystematik.

10. Die Ostwaldsche „Grundgleichung" $R + W + S = 100$. Die bisher beschriebenen Versuche hat Seitz zur Kritik der Helmholtzschen Definition der Sättigung im einzelnen und der Dreikomponententheorie im allgemeinen unternommen. Im zweiten Teile seiner Arbeit berichtet Seitz über Versuche, die als „Gegenprobe" [1]) die Brauchbarkeit der von Wilhelm Ostwald stammenden Farblehre dartun sollen, welche — ursprünglich nur für die Einteilung seines Farbatlasses gedacht — zur Kennzeichnung aller Pigmente geeignet sein soll.

Es sei nur kurz erwähnt, daß der Farbatlas in verschiedene „Farbkreise" zerfällt, von denen jeder alle Farbtöne — bei Ostwald wird ihre Zahl aus praktischen Gründen auf 100 festgesetzt [2]) — enthält. Die Farben eines jeden Farbkreises besitzen (annähernd) denselben „Weißgehalt" und gleichen sich (ungefähr) durch ihren „Schwarzgehalt", so daß also auch Ostwald drei Bestimmungsstücke, nämlich Farbton, Weiß- und Schwarzgehalt, zur Kennzeichnung eines Pigmentes benutzt. Diese drei Komponenten werden derart angegeben, daß an erster Stelle die dem Farbtone zugeordnete Nummer, an zweiter Stelle der Weißgehalt, an dritter der Schwarzgehalt (beides in Prozentzahlen) steht. Sie sind durch eine Gleichung verbunden, die nach Ostwald von fundamentaler Bedeutung für die Farblehre sein soll, nämlich: $R + W + S = 100$, worin „R" den Gehalt an reiner Farbe oder den „Reinheitsgrad", „W" den an Weiß und „S" den „Schwarzgehalt" bedeuten.

1) W. Seitz, l. c., S. 299.

2) Aus leicht ersichtlichen Gründen wird überall in dieser Arbeit die früher übliche 100-Teilung des Farbkreises beibehalten. Die einfache Umrechnung auf den seit 1924 eingeführten 24teiligen Farbkreis ergibt sich aus folgender Zusammenstellung:

Alte Bez.:	0	4	8	13	17	21	25	29	33	38	42	46
Neue „ :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Alte Bez.:	50	54	58	63	67	71	75	79	83	88	92	96
Neue „ :	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Über die Einteilung des Farbenatlasses gibt die „Farbenfibel" W. Ostwalds eine kurze, seine „Farbenlehre" (Bd. 1, 1918 und Bd. 2, 1919) eine ausführliche Übersicht.

11. Die Definition der Ostwaldschen Komponenten. Die Definition dieser drei Bestimmungsstücke geht aus Ostwalds Angaben im zweiten Bande seiner „Farbenlehre" (S. 190/91) hervor. „Man denkt sich ein genügend helles und langes Spektrum objektiv entworfen und den Aufstrich durch dieses Spektrum hindurchgeführt. Dann wird es eine Stelle geben, an welcher der Aufstrich am hellsten erscheint. Ferner gibt es eine zweite Stelle, an welcher der Aufstrich am dunkelsten erscheint. Nun kann man die Farbe, in welcher der Aufstrich erscheint, rechnerisch als aus drei Teilen bestehend ansehen, nämlich dem Anteil reiner Farbe R, ferner dem Anteil weißen Lichtes W, das der Aufstrich zurückwirft, und endlich dem „schwarzen" Anteil S oder dem Anteil des Lichtes, welchen der Aufstrich unter allen Umständen verschluckt". Die Helligkeit an der hellsten Stelle des Aufstriches ist immer kleiner als die „einer absolut weißen Fläche, für welche man mit genügender Annäherung eine Schicht von chemisch reinem Baryumsulfat setzen kann". Die Differenz dieser beiden Helligkeiten ergibt den Schwarzgehalt S, die Helligkeit an der dunkelsten Stelle den Weißgehalt W. Aus der oben genannten Formel folgt nun der Anteil an reiner Farbe oder der Reinheitsgrad, „wenn man die Helligkeit an der dunkelsten Stelle von der Helligkeit an der hellsten Stelle

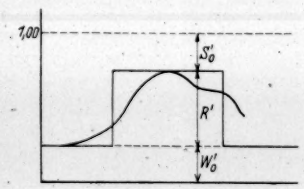


Fig. 5.

abzieht." Dieser Sachverhalt wird durch Fig. 5 erläutert. Die Fig. 5 entspricht der von Schollmayer beanstandeten Fig. 6 in Cl. Schaefers Arbeit „Über den sogenannten Schwarz- und Weißgehalt in der Ostwaldschen Farbensystematik"[1]).

Dadurch, daß aus technischen Gründen für die Schwarz- und Weißmessung Farbfilter benutzt werden, wird noch eine besondere Korrektur nötig, auf welche an späterer Stelle ausführlich eingegangen wird. Da diese nichts Grundsätzliches an dem skizzierten Meßprinzip ändert, sei vorläufig hiervon abgesehen. Ferner soll hier auf weitere Einzelheiten der Ostwaldschen Farbensystematik nicht eingegangen werden, da sie oft genug von W. Ostwald selbst und von verschiedenen seiner Anhänger beschrieben worden ist.

12. Das Verhältnis der Ostwaldschen Farbensystematik zur Dreikomponententheorie. Grundsätzlich brauchte die Ostwaldsche Farblehre durchaus kein Widerspruch gegen die Helmholtzsche Dreikomponententheorie zu sein. Denn beide Systeme geben drei Bestimmungsstücke als notwendig und hinreichend zur Kennzeichnung einer Farbe an, unter denen in beiden Fällen der Farbton als die eine Komponente gilt. Da aus den Ostwaldschen Angaben der Gehalt an reiner Farbe ohne weiteres zu entnehmen ist und der Weißgehalt als zweite Komponente angegeben wird, so könnte auch die zweite Helmholtzsche Komponente, die Sättigung $S = \frac{\text{reine Farbe}}{\text{reine Farbe} + \text{Weiß}}$, in einfacher Weise aus den Ostwaldschen Angaben entnommen werden. Auch die dritten Komponenten, nämlich Schwarzgehalt und Helligkeit, lassen sich ineinander überführen, wie späterhin abgeleitet werden soll.

Die Ostwaldsche Farblehre ist also tatsächlich selbst nur eine Variante der Dreikomponententheorie; denn an Stelle der von Helmholtz gewählten drei Komponenten kann man ohne weiteres ein anderes Komponententripel setzen, das sich in einwandfreier Weise aus ihnen ableiten läßt. Die Wahl selbst kann gar nicht „richtig" oder „falsch" sein, weil die Dreikomponententheorie gar keinen Zwang zur Wahl eines bestimmten Komponententripels ausübt. Es wäre lediglich Sache der Zweckmäßigkeit, möglichst anschauliche, eindeutige und den Anforderungen des praktischen Gebrauchs Rechnung tragende Bestimmungsstücke zu wählen. Nur hierüber — über eine geeignete Wahl — ließe sich diskutieren, die Diskussion selbst würde aber innerhalb der Grenzen der Dreikomponententheorie sich halten. Würde irgend jemand tatsächlich Material gegen die Dreikomponententheorie erbringen, so wäre die Ostwaldsche Systematik eo ipso erledigt.

Wenn trotzdem tiefgehende Unterschiede zwischen beiden Farbsystemen bestehen, welche auf beiden Seiten empfunden werden, so liegt das nicht an abweichenden Grundlagen der Theorien — Anzahl und Wahl der Komponenten —, sondern an abweichenden Prinzipien der Definition und Messung grundsätzlich ähnlicher Grundbegriffe. Es handelt sich um die Frage, ob die Remissionskurve tatsächlich in der von Ostwald

1) Physik. Zeitschr. **27**, 347/353, 1926. Für die von Schollmayer angegebene Fig. 3 in seiner „Richtigstellung", welche die „Herstellung eines vereinfachten Spektrums nach Ostwald, vgl. Farbenlehre, Buch II, Kap. 13" zeigen soll, läßt sich in dem zitierten Kapitel kein Beleg finden; es dürfte Kap. 14 gemeint sein.

angegebenen Weise den Weißgehalt und den Gehalt an reiner Farbe ergibt, oder ob man zu der grundsätzlich anderen Definitions- und Meßweise der auf Newton, Th. Young, Graßmann, Helmholtz und Maxwell aufbauenden Farblehre greifen muß. Unter diesem Gesichtspunkte sind auch die Wählversuche zu werten, welche Seitz im zweiten Teile seiner zitierten Arbeit von verschiedenen Versuchspersonen ausführen ließ.

13. Die Seitzschen Wählversuche. Die einzelnen Farbkreise des Ostwaldschen Farbatlasses machen nach Seitz „wenigstens annähernd den Eindruck gleicher Sättigung und Weißlichkeit". Um nun zu prüfen, ob man umgekehrt aus einer großen Anzahl verschiedener Pigmente die zu einem Farbkreise gehörenden zusammenstellt, wenn man die empfindungsgemäß in Sättigung und Weißlichkeit ähnlichen Farbblättchen auswählt, stellte Seitz folgende Versuche an:

Etwa 50 Farbblättchen gleichen Farbtones, aber verschieden in ihrem Weiß- und ihrem Schwarzgehalt, wurden „einer Versuchsperson vorgelegt und ihr die Aufgabe gestellt, aus ihnen zu einem bestimmten Blättchen anderen Tons ein solches auszuwählen, das ebenso gesättigt und ebenso weißlich erscheint. Es wurden so im ganzen etwa 600 Einzelversuche mit verschiedenen Paaren von Tönen, vor allem den Tönen Nr. 0,35, 50 und 75 (Gelb, Rot, Blau und Grün) und verschiedenem Weiß-Schwarzgehalt des vorgelegten Blättchens mit 7 Versuchspersonen, von denen vier niemals den Ostwaldschen Atlas gesehen hatten und daher vollkommen unvoreingenommen waren, ausgeführt[1])". Bei ungesättigten Pigmenten zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem den Versuchspersonen unbekannten Ostwaldschen Weiß- und Schwarzgehalt, während „bei höherer Reinheit die Farben, die einem Ostwaldschen Kreise angehören, nicht mehr den Eindruck gleicher Sättigung und gleicher Weißlichkeit erwecken". Seitz folgert aus diesem Ergebnis „die Berechtigung des Ostwaldschen Systems in psychologischer Beziehung, soweit man sich auf gebrochene (ungesättigte) Farben beschränkt". Für die Abweichungen bei gesättigten Farben macht er physiologische Ursachen geltend, lehnt jedenfalls „Ungenauigkeiten in der Herstellung und Messung des Ostwaldschen Atlas" als Ursachen hierfür ausdrücklich ab.

14. Der Weißgehalt in Ostwaldscher und in exakter Definition. Da die Empfindung, welche bei diesen Versuchen ausschlaggebend ist, sowohl von der Sättigung als auch von der Helligkeit — oder auch vom „Weißgehalt" und vom „Schwarzgehalt" — abhängt, so darf man von den Ergebnissen dieser Versuche Aufschluß über die richtige Art erwarten, wie die beiden Komponenten zu definieren und zu messen sind.

Es sei zunächst der Zusammenhang zwischen Ostwaldschem Weißgehalt und absoluter Weißmessung betrachtet.

Um Schwierigkeiten hinsichtlich eines bloßen Zahlenfaktors zuvorzukommen, sei der folgenden Überlegung vorausgeschickt, daß beim Übergange von einem Meßsystem in das andere wiederholt der Faktor 3 oder 1/3 auftritt, da definitionsgemäß Ostwald das absolute Weiß = 100, die exakte Farbenlehre aber = 300 setzt.

Man denke sich einen idealen Farbaufstrich, dessen Remissionskurve im Absorptionsgebiet bis auf Null hinuntergeht, also gar kein Licht remittiert, während sie im Remissionsgebiete den Wert 100 erreicht, d. h. an der Stelle ihres Maximums ebensoviel remittiert, wie ein absolut weißes Pigment. Die gestrichelte Kurve K in Fig. 6 sei die Remissionskurve eines solchen idealen Pigmentes, für das sowohl der Ostwaldsche Weiß- als auch Schwarzgehalt = 0 ist, und habe demnach den „Reinheitsgrad"

$$R = 1 - (W_0 + S_0) = 1.$$

Wird durch Multiplikation mit den Grundempfindungskurven und Ausmessung der entstehenden Flächen ihr Rot-, Blau- und Grüngehalt bestimmt, so ergebe sich:

$$K \approx a\,\text{Rot} + b\,\text{Grün} + c\,\text{Blau}, \qquad (1)$$

wobei $a > b > c$ sei.

Aus dieser Kurve K läßt sich die Kurve K' entwickeln, indem man jede Ordinate von K

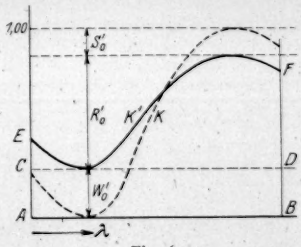


Fig. 6.

mit $1 - (W_0' + S_0') = R'$ multipliziert und die Strecke W_0' addiert. Auch die exakten Rot-, Grün- und Blau-Werte a', b' und c' der Kurve K' lassen sich aus den bekannten Werten a, b und c der Kurve K berechnen, so daß sich ein Multiplizieren von K' mit den Grundempfindungs-

[1]) Seitz, l. c.

kurven und ihre Auswertung erübrigt; denn die Fläche $ABEF$ kann man sich zerlegt denken in die Flächen $ABCD$ und $CDEF$. Nun entsprechen:

$$CDFE \approx R'a \text{ Rot} + R'b \text{ Grün} + R'c \text{ Blau}$$

und

$$ABCD \approx W_0'' \quad „ \quad + W_0'' \quad „ \quad + W_0'' \quad „ \ .$$

Die beiden letzten Gleichungen addiert ergeben:

$$K'' \approx (R'a + W_0'') \text{ Rot} + (R'b + W_0'') \text{ Grün} + (R'c + W_0'') \text{ Blau}. \tag{2}$$

Setzt man die in Klammern eingeschlossenen Werte bzw. gleich a', b' und c', so läßt sich Gleichung (2) schreiben:

$$K'' \approx [(a' - c') + (b' - c')] + 3c',$$

wobei $3c'$ den exakten Weißgehalt der Kurve K'' darstellt, d. i.

$$W_{K'' \text{ exakt}} = 3c',$$

also

$$W_{K'' \text{ exakt}} = 3 \cdot (R'c + W_0'') \tag{3}$$

oder

$$W_{K'' \text{ exakt}} = 3(\triangle W'' + W_0''). \tag{4}$$

Da der Faktor 3 in Gleichung (3) und (4) von der Wahl der Einheit abhängt, W_0'' aber den Ostwaldschen Weißgehalt von K'' angibt, so stellt

$$\underline{\triangle W'' = R'c} \tag{5}$$

den Fehler dar, um welchen die Ostwaldsche Weißangabe erhöht werden muß, um den richtigen Weißwert zu ergeben. Der Faktor c hängt von der Gestalt der Kurve K, d. h. vom Farbtone, ab. Gleichung (5) sagt also aus, daß bei vorgegebener Ostwaldscher Reinheit R' der „Fehler" $\triangle W''$ vom Farbtone, bei vorgegebenem Farbtone jedoch von dem Reinheitsgrade R' abhängt, und zwar wächst $\triangle W''$ proportional R'.

Wie bereits früher festgestellt, gibt es offenbar keine reine Sättigungsempfindung, sondern diese wird durch die Helligkeit der Farbe stark mit beeinflußt. Um die „empfindungsmäßig" gefundenen Ergebnisse der Seitzschen Wählversuche richtig zu deuten, soll daher im folgenden noch der Zusammenhang zwischen Ostwaldscher Schwarzmessung und absoluter Helligkeit betrachtet werden.

15. Ostwaldscher Schwarzgehalt und exakte Definition der Helligkeit. Eine die drei Grunderregungen (A, B, C) auslösende Farbe F werde dargestellt durch die allgemeine Gleichung:

$$la + mb + nc = F, \tag{6}$$

worin l, m, n unbenannte Zahlen, $a = a(A)$, $b = b(B)$ und $c = c(C)$ jedoch derart gewählte Einheiten der bezüglichen Grunderregungen seien, daß $(a + b + c)$ Weiß ergeben (Königsche Gleichung).

Man kann die Einheiten der drei Grunderregungen auch noch anders definieren, indem man nämlich als neue Einheiten $a' = \alpha a$, $b' = \beta b$ und $c' = \gamma c$ einführt. Die Proportionalitätskonstanten α, β und γ — die drei sog. Koeffizienten der spezifischen Helligkeit der drei Grundempfindungen A, B und C — lassen sich so bestimmen, daß die Gleichung

$$la' + mb' + nc' = H \tag{7}$$

unmittelbar die Helligkeit H der Farbe F ergibt. Ob dieser lineare Ansatz für die Helligkeit berechtigt ist, läßt sich derart prüfen, daß man die Helligkeit von Pigmenten einmal durch heterochromatische Photometrie unmittelbar bestimmt, ein andermal nach Gleichung (7) aus dem Gehalt an drei Grunderregungen berechnet. Auf diese Weise ist die Richtigkeit der Gleichung (7) — des auf Graßmann zurückgehenden „Additionstheorems der Helligkeit" — von Exner[1]), Kohlrausch[2]) und Schaefer[3]) experimentell nachgewiesen worden.

Die Gleichungen (6) und (7) gelten sowohl für spektrale Lichter als auch für Pigmente. Diese beiden Gruppen von Lichtern lassen sich zwar hinsichtlich der Entstehungsart ihrer Farben unterscheiden, nicht aber hinsichtlich der Wesensart des von ihnen ausgehenden Lichtes und der demselben entsprechenden Erregung des Auges. Wenn man beispielsweise in eine hinreichend große undurchsichtige Wand eine kleine Öffnung macht und durch diese die Strahlen irgendeines farbigen Lichtes, das man hinter der Wand erzeugt, hindurchschickt, so kann ein vor der Wand befindlicher Beobachter wohl mit Hilfe irgendeines geeigneten Apparates die spektrale Zusammensetzung des farbigen Lichtes bestimmen, keineswegs aber auf Grund irgendeiner physikalischen Messung oder gar des bloßen Aussehens der Farbe eine Entscheidung darüber treffen, ob das farbige Licht durch Mischen von spektralen Lichtern oder etwa durch Beleuchtung eines farbigen Pigmentes mit weißem Lichte entstanden ist. Es läßt also weder der physikalische Reiz, noch die physiologische Erregung einen Rückschluß darüber zu, welcher der beiden Gruppen eine vorliegende Farbe angehört, so daß man jede Farbe der einen Gruppe durch eine völlig gleichaussehende der andern ersetzen kann[4]).

1) Exner, Wien. Ber. IIa, **129**, 27—45, 1920.
2) K. W. F. Kohlrausch, Physik. Zeitschr. **21**, 403 ff, 1920.
3) Cl. Schaefer, Physik. Zeitschr. 26, 58—64 und 908—913, 1925.
4) Da von Gegnern der exakten Meßweise besonderer Nachdruck auf Erfahrung und Praxis gelegt wird, sei auf S. Roesch, (Physik. Zeitschr. **29**, 83—91, 1928) verwiesen, der diese Tatsache zur Konstruktion eines exakte Werte liefernden Farbenmeßapparates benutzt hat.

Trotzdem unterscheidet Ostwald spektrale Lichter und Pigmente gerade im Hinblick auf ihr Aussehen, da er auf Grund seiner Hypothese von der „Bezogenheit" der Pigmentfarben nur diesen die Fähigkeit eines „Schwarzgehaltes" zuerkennt.

Um die Beziehung zwischen Ostwaldschem Schwarzgehalt S_0 und absoluter Helligkeit H abzuleiten, bedarf es eines Zwischengliedes, der Remissionshelligkeit H_R, das im folgenden definiert werde:

Ein ideal weißer Aufstrich, beleuchtet mit weißem Licht (Sonnenlicht bei mäßig bewölktem Himmel), habe die Helligkeit h_w; dann hat ein farbiger Aufstrich f' ceteris paribus die Helligkeit $h_{f'} < h_w$. Der Quotient

$$h_{f'} : h_w = H'_R \tag{8}$$

ist durch verschiedene Methoden meßbar und bleibt konstant, wenn man denselben Versuch mit Licht von derselben spektralen Verteilung, aber größerer oder kleinerer Intensität wiederholt, vorausgesetzt, daß sich die Intensität des Lichtes innerhalb eines „normalen" Bereiches hält; Überschreitung der oberen Grenze dieses Bereiches würde Blendung, Unterschreitung der unteren das Purkinjesche Phänomen bewirken. Ersetzt man f' durch andere Pigmente f'', f''' usw., so erhält man entsprechende Werte H''_R, H'''_R usw., die im allgemeinen voneinander abweichen. Folglich ist die Größe H_R, welche Remissionshelligkeit genannt werde, bei weißer Beleuchtung normaler Intensität unabhängig von der Beleuchtung und eine meßbare Eigenschaft der Pigmente.

Anderseits hat der eine von uns[1]) experimentell nachgewiesen, daß Pigmente gleichen Farbtons aber verschiedener Remissionshelligkeit einander ununterscheidbar angeglichen werden können, wenn man die Helligkeit ihrer Beleuchtung im umgekehrten Verhältnisse ihrer Remissionshelligkeiten wählt. Hieraus folgt unter anderm der funktionelle Zusammenhang zwischen der absoluten Helligkeit H eines Pigmentes, seiner Remissionshelligkeit H_R und der Intensität seiner Beleuchtung H_L zu:

$$H = H_R \cdot H_L . \tag{9}$$

Die Messung der Remissionshelligkeit kann entweder unmittelbar — etwa nach einer der Methoden von Exner, Kohlrausch oder Schaefer — erfolgen oder einfach unter Verwendung der von Exner[2]) gemessenen Werte für die Koeffizienten der spezifischen Helligkeiten der drei Grunderregungen nach dem Prinzipe von der Additivität heterochromatischer Farben[1]) (Gleichung 7) aus den exakt bestimmten Werten a, b, c des Pigmentes berechnet werden. Im Gegensatz zur exakten Bestimmung des Farbtones und der Sättigung ist es hierbei erforderlich, die Werte a, b, c auf ein ideal weißes Pigment zu beziehen; hat also das verwendete Bezugsweiß die Remissionshelligkeit $h_w < 1$, so sind die in bekannter Weise aus der Remissionskurve erhaltenen Werte a, b, c mit h_w zu multiplizieren, um aus ihnen in vorerwähnter Weise die tatsächliche Remissionshelligkeit des Pigmentes berechnen zu können.

Wie früher erwähnt, kann man unter gewissen Voraussetzungen aus den Remissionskurven K', K'' usw. vorgegebener Pigmente ein- und desselben Farbtones aber verschiedener Helligkeit und Weißlichkeit die Remissionskurve K eines derart idealisierten Pigmentes ableiten, daß sein Ostwaldscher Schwarz- bzw. Weißgehalt $W_0 = S_0 = 0$ wird; umgekehrt läßt sich aus K bzw. aus seinen Grunderregungen a, b, c die Gleichung eines Pigmentes gleichen Farbtones aber beliebigen Ostwaldschen Weiß- und Schwarzgehaltes W'_0 und S'_0 nach Gleichung (2) bestimmen zu:

$$(K' \cdot a + W'_0) + (K' \cdot b + W'_0) + (K' \cdot c + W'_0) = a' + b' + c' .$$

Der Zusammenhang zwischen Ostwaldschem Schwarzgehalt S_0 und exakten Größen läßt sich am einfachsten berechnen, wenn man zu den früher bereits definierten Größen eine weitere exakte Größe hinzunimmt, welche als die Helligkeitsabsorption

$$S_{\text{exakt}} = 1 - H_R \tag{10}$$

eines Pigmentes bezeichnet werden soll. Setzt man die Remissionshelligkeit des absoluten Weiß $= 1$ und bezeichnet diejenige des idealisierten Pigmentes K mit H_R, so kommt dem Pigmente K' des gleichen Farbtones aber mit dem Ostwaldschen Weiß- und Schwarzgehalte W'_0 und S'_0 folgende Remissionshelligkeit zu:

$$H'_R = [1 - (W'_0 + S'_0)]\, H_R + W'_0 = R' H_R + W'_0 .$$

1) Cl. Schaefer, Physik. Zeitschr. **27**, 347—353, 1926; vgl. auch F. Exner, Wien. Ber. Abt. IIa, **127**, 1928, 1919.

2) Exner, Ber. d. Wien. Akad. d. Wissensch., IIa, 129, 12, 1920.

1) Dieses Prinzip ist bereits in dem 4. Grassmannschen Satze enthalten (Pogg. Ann. **89**, 69—84, 1853), welcher nach Helmholtz (Pogg. Ann. **94**, 1—28, 1855) lautet: Die Lichtintensität der Mischung ist die Summe aus den Intensitäten der gemischten Lichter.

Absolute Helligkeitsmessungen, allerdings nicht unter Benutzung der Grundempfindungen, sondern dreier willkürlich gewählter Farben, wurden zuerst von W. Abney ausgeführt. (Phil. Transact. Bd. 205, 1906.)

Diese Gleichung ergibt, wenn man sie von $1 = 1$ subtrahiert:

$$1 - H'_R = 1 - R' H_R - W'_0 .$$

Es ist aber:

$$1 - (W'_0 + S'_0) = R' ,$$

also: $$1 - W'_0 = R' + S'_0 .$$

Eingesetzt in obige Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned} 1 - H'_R &= R' - R' H_R + S'_0 \\ &= R' (1 - H_R) + S'_0 \end{aligned}$$

oder:

$$\underline{1 - H'_R = S'_{\text{exakt}} = R' S_{\text{exakt}} + S'_0 .} \qquad (11)$$

Da Ostwald den Schwarzgehalt des betrachteten Pigmentes R' zu S'_0 angibt, so beträgt also der Fehler, um welchen er die seinem Schwarzgehalte entsprechende exakte Größe S'_{exakt} zu klein angibt:

$$\underline{\Delta S' = R' S_{\text{exakt}} .} \qquad (12)$$

Da S'_{exakt} von der Form der Remissionskurve, also vom Farbtone abhängt, so ist der Fehler $\Delta S'$ bei vorgegebener Ostwaldscher Sättigung eine Funktion des Farbtones; bei vorgegebenem Farbtone hängt er dagegen von R' ab, und zwar ist der Fehler proportional dem Ostwaldschen Reinheitsgrade.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Im Gegensatz zu Seitz haben wir von seinen Wählversuchen von vornherein keine Entscheidung für oder gegen die Ostwaldsche Farbensystematik, wohl aber für oder gegen die Ostwaldsche Art der Schwarz-Weiß-Messung erwartet.

Da die Differenzen zwischen exakter und Ostwaldscher Schwarz-Weiß-Messung durchaus in demselben Sinne laufen wie die Abweichungen von den Ostwaldschen Farbkreisen in den Wählversuchen, derart daß sie bei geringer Reinheit („gebrochenen Farben") unmerklich sind, während sie mit wachsender Reinheit zu beträchtlichen Werten ansteigen, so sind diese Versuche in zwangloser Deutung als gute Bestätigung für die Richtigkeit der exakten Farbmessung anzusehen.

16. Der Sättigungsbegriff in der Empfindung und als Komponente. Die Seitzschen Wählversuche sind noch aus einem anderen Grunde wesentlich. Von der Empfindung, welche Seitz als Sättigungsempfindung auffaßt, wissen wir bisher nur, daß sie auch weitgehend durch die Helligkeit, richtiger wohl: durch die relative Helligkeit, bestimmt wird. Es wäre darum weniger irreführend, würde man dieser Empfindung einen anderen Namen geben, sie etwa als „Leuchtkraft" oder „Klarheit" einer Farbe bezeichnen. Würde man nun diese Seitzschen Versuche in größerem Umfange, vor allem mit mehr als vier Farbtönen, ausführen und bei den Ergebnissen die exakten Werte für Sättigung (oder Weißlichkeit) und relative Helligkeit der einzelnen Farben berücksichtigen, so erhielte man den funktionalen Zusammenhang zwischen Empfindung, Sättigung und relativer Helligkeit. Hierbei könnte es sich zeigen, daß — ebenso wie in unserer Empfindung die relative Helligkeit mitunter wesentlicher erscheint als die absolute Helligkeit — es auch eine relative Sättigung gibt, welche sich zur absoluten Helmholtzschen Sättigung ähnlich verhält. Eine solche relative Sättigung erhält man sinngemäß, indem man die Sättigung irgendeiner Farbe nicht auf die zugehörige auf einer Seite des Helmholtzschen Farbendreiecks — im allgemeinen also außerhalb der reellen Farbfläche — liegende reine Farbe bezieht, sondern auf die zugehörige Spektralfarbe, als auf die gesättigste aller normaler Weise wahrnehmbaren Farben von demselben Farbtone, bezug nimmt. Man erhält mithin die relative Sättigung einer Farbe, indem man ihre absolute Sättigung durch die Sättigung der zugehörigen Spektralfarbe dividiert.

In Fig. 1 ist die absolute Sättigung der Farbe F:

$$S_{\text{absolut}} = \frac{FW}{RW} ,$$

die relative Sättigung:

$$S_{\text{relativ}} = \frac{FW}{RW} : \frac{RW}{SW} = \frac{FW}{SW} .$$

Es fragt sich noch, wie man die relative Sättigung von Purpurtönen berechnen soll. Man könnte formal auf die Sättigung der zugehörigen komplementären Spektralfarbe beziehen und erhielte beispielsweise für die Farbe F' die relative Sättigung $S'_{\text{rel.}} = \frac{F'W}{S'W}$. In dieser Weise verfahren amerikanische Forscher, welche die so definierte relative Sättigung als „monochromatische" Sättigung zu bezeichnen pflegen und vielfach anwenden. Da sich hierbei aber für die relative Sättigung von Purpurtönen Werte ergeben können, welche größer als 1 sind, dürfte es richtiger sein, sie auf die entsprechenden Farben der Geraden LK zu beziehen, so daß man anstatt $S'_{\text{rel.}}$ erhält: $S''_{\text{rel.}} = \frac{F'W}{S''W}$. In diesem Falle wird gleichmäßig den gesättigsten aller normalerweise wahrnehmbaren Farben der Wert 1 zugeordnet. Aber selbst wenn es sich einwandfrei herausstellen würde, daß die relative Sättigung oder irgendeine andere Definition des Sättigungsbegriffes unserer Empfindung besser angepaßt ist als die sog. Helmholtzsche Sättigung, so wäre damit noch nicht ihre bessere Eignung als Komponente erwiesen.

Fig. 2. Vakuumfunkspektrum mit Elektroden aus *Ca*. Exp. 45 Min. 5-fach vergrößert.

Fig. 3. Vakuumfunkspektrum mit Elektroden aus *Al*. Exp. 45 Min. 5-fach vergrößert.

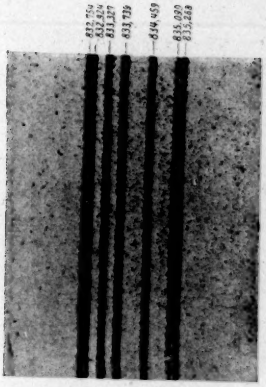


Fig. 4.
Sauerstoff-Multiplex O II, O III.

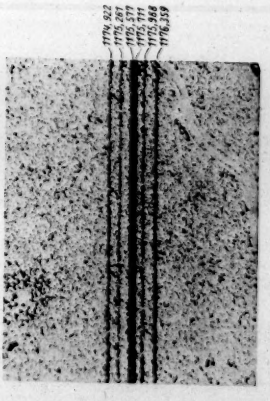


Fig. 5.
Kohlenstoff-Multiplex C III.

Erik Ekefors, Spektren im extremen Ultraviolett.
Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Nach der Widerlegung von Angriffen, welche sich gegen die Definition des klassischen Sättigungsbegriffes im einzelnen und gegen die Dreikomponententheorie im allgemeinen richten, sei in aller Kürze auf den positiven Wert der Graßmann-Helmholtzschen Definition der Sättigung hingewiesen.

Es übersteigt selbstverständlich die Leistungsfähigkeit eines Bestimmungsstückes, wenn man von ihm fordert, es solle eine komplizierte Empfindung in einfacher Form wiedergeben. Man kann und muß von einer Komponente verlangen, daß sie sich organisch in das ganze System fügt, dabei jedoch einfach und eindeutig definiert ist. Dies ist in vollem Umfange bei der klassischen Definition der Sättigung der Fall, so daß sie allen Anforderungen genügt, die man billigerweise an sie stellen kann.

(Eingegangen 26. Juni 1930.)

Spektren im extremen Ultraviolett.

Von Erik Ekefors.

Mit Tafel XX.

Mit einem von Prof. M. Siegbahn konstruierten, von dem Verfasser einjustierten und erprobten Vakuumgitterspektrographen, sind gute Resultate gewonnen, worüber hier eine vorläufige Mitteilung gegeben wird. Es wurde mit Vakuumfunke gearbeitet und als Spannungsquelle diente ein Wechselstromtransformator nach folgendem Schema (Fig. 1). Diese Anordnung

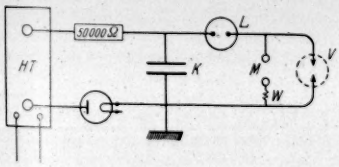


Fig. 1.

die beim hiesigen Institute ausgebildet ist, erweist sich als sehr leistungsfähig. Man kann damit größere Kapazitäten (wegen Fortfall der Resonanzbedingung) und höhere Spannungen benutzen ohne Überlastung des Transformators, als bei der üblichen Anordnung ohne Gleichrichtung der Fall ist. Außerdem erhält man hier eine viel stärkere Anregung. L und V sind Luft- und Vakuumfunke, M ist eine Meßfunkstrecke mit Kugeln von 5 cm Durchmesser. L ist zur Dämpfung des Geräusches in ein Gefäß eingeschlossen. Zur Dämpfung der Meßfunkenentladung ist ein Wasserwiderstand W vorgesehen. Die Kapazität K war bei diesen ersten Versuchen $0{,}03\,\mu F$ und die Funkgeschwindigkeit im allgemeinen 2—3 Funken pro Sekunde.

Der Spektrograph ist von ungefähr demselben Typus wie der von Ericson und Edlén[1]) benutzte. Er hat ein Woodsches 1-Meter Konkavgitter, auf Glas geritzt und mit 1183 Strichen pro Millimeter. Der Glanzwinkel ist 6°, Dispersion 1,6 Å/mm bei 100 Å und 3,0 Å/mm bei 1000 Å. Es erweist sich bei dieser schrägen Inzidenz als notwendig mit sehr engem Spalte zu arbeiten. Vorläufig benutze ich einen Spalt von 0,004 mm, doch dürfte man mit Vorteil noch engere Spalte brauchen können. Der Abstand zwischen Funke und Spalt ist ziemlich groß, etwa 6 cm, was sehr vorteilhaft ist, wenn man mit stark zerstäubenden Elektroden arbeitet. Trotz dieses großen Abstandes gibt der Spektrograph sehr lichtstarke Spektren. Das Auflösungsvermögen ist vorzüglich, was die beifolgenden Spektrogramme zeigen. Fig. 2 zeigt einen Teil des Kalziumspektrums. Dasselbe Spektrum wurde früher mit dem anderen oben genannten Spektrographen aufgenommen, doch ist bei diesem letzten die Auflösung weitaus besser. Wie ersichtlich ist die stark zusammengedrängte Gruppe bei 340 Å gut aufgelöst. Die Fig. 3 zeigt das Spektrum von Aluminium zwischen 75 und 160 Å. Dieses Spektrum ist also gegen kürzere Wellenlängen wesentlich ausgedehnt worden, indem unter anderem zwei ziemlich starke Linien bei 75,33 und 76,58 Å beobachtet sind[2]). Diese beiden Linien sind gegen die zwischenliegende Berylliumlinie 75,94[3]) gemessen. Aus der Fig. ersieht man auch, besonders bei 160,1 Å, wie kräftig die Geister bei den stärksten Linien entwickelt sind. Sie haben einen ziemlich komplizierten Charakter; an der kurzwelligen Seite befinden sich zwei Gruppen von Geistern. Die Geister sind jedoch symmetrisch, wenn das Gitter gut gleichmäßig beleuchtet wird. Fig. 4 und 5 geben die Sauerstoffgruppe bei 834 Å und die PP'-Gruppe von C III bei 1175 Å, beide in der ersten Ordnung und 28 fach vergrößert. Bei der letzteren kann man die beiden mittleren Linien getrennt sehen.

Es scheint, nach diesen ersten Versuchen, daß bei Arbeiten auf diesem Gebiete Glasgitter leistungsfähiger als Metallgitter sein dürften, wie dies Wood und Lyman[4]) bei den größeren

1) A. Ericson und B. Edlén, Zeitschr. f. Phys. **59**, 656, 1929.
2) Vgl. A. Ericson und B. Edlén, l. c., Zusatz.
3) B. Edlén und A. Ericson, Nature **125**, 233, 1930.
4) R. W. Wood und Th. Lyman, Phil. Mag. **2**, 310, 1926.

Wellenlängen des extrem-ultravioletten Gebietes gefunden haben. Das Gitter war im hiesigen Institute mikrophotographiert und zeigte ziemlich große Unregelmäßigkeiten, doch ist die Abbildung gut, wenn man von den kräftig entwickelten Geistern absieht.

Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen sind die Arbeiten weitergeführt worden, so daß bei größeren Kapazitäten das Aluminiumspektrum noch mehr erweitert ist. Die beiden vorher genannten Linien bei 75 Å sind auf den letzten Platten sehr stark und es treten viele neue kurzwelligere Linien auf; die kürzeste liegt nun bei etwa 49 Å.

Upsala, Physikalisches Institut, April 1930.

(Eingegangen 3. Mai 1930.)

Ein Experiment das die Kräfte demonstriert, welche die Verschiebung der Kontinente verursachen können.

Von U. Ph. Lely.

Im interessanten Büchlein von Prof. Dr. A. Wegener über „die Entstehung der Kontinente", werden die Kontinente betrachtet als Schollen, die in einer äußerst zähflüssigen Masse schwimmen; man spricht von einem Kontinententrieb und man sucht die Ursache, die diesen Trieb zustande bringt.

Als mögliche Ursache wird angezeigt die Kraft, die ein schwimmender Gegenstand auf der Erdoberfläche infolge der Rotation der Erde erfährt. Der Schwerpunkt dieser schwimmenden Gegenstände liegt ja höher als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit; falls die Kraftlinien des Gravitationsfeldes gebogen sind, ist kein Gleichgewicht möglich und der schwimmende Gegenstand verschiebt sich. Bei der gegebenen Winkelgeschwindigkeit und Anziehung hat man es mit einer polfliehenden Bewegung zu tun.

Die Kraftlinien des Gravitationsfeldes der Erde sind nahezu gerade Linien vom Mittelpunkt der Erde aus. Wir werden das hier wenigstens voraussetzen; die Intensität der Gravitation ist umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt, und dorthin weist auch die Richtung der Kräfte. Aber es gibt auch eine Achsendrehung, der alles gehorcht, also auch eine Beschleunigung dem Mittelpunkt der Kreisbewegung zu. Die Beschleunigungen stehen senkrecht auf der Drehachse und sind dieser Achse zugewendet. Dieses Beschleunigungsfeld kann in seiner Wirkung auf träge Gegenstände, welche ihm gehorchen müssen, durch ein Gravitationsfeld ersetzt werden, dessen Kraftlinien senkrecht stehen auf der Achse (sie schneiden diese), während die Intensität der Kraft der Entfernung von der Achse proportional ist. Die Richtung ist von der Achse abgewendet. Beide Gravitationsfelder zusammen geben ein resultierendes Feld, dessen Kraftlinien gebogen sind, mit Ausnahme der Kraftlinien in der Äquatorialebene und der Kraftlinie, welche zusammenfällt mit der Drehachse. Ebenso gibt es eine Gruppe von Kraftlinien, welche Wendepunkte zeigen; jede Kraftlinie dieser Gruppe hat einen Wendepunkt. In diesem Wendepunkte ist die Krümmung Null. Eine Flüssigkeit wird sich nun so einstellen, daß diese Kraftlinien die Flüssigkeitsoberfläche senkrecht schneiden; nur in dem Falle ist Gleichgewicht da. Die neue Massenverteilung stört natürlich die erste Voraussetzung über das anziehende Zentrum mit einer Kraft umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung. Aber dies lasse ich jetzt dahingestellt. Auf einen auf dieser Flüssigkeit schwimmenden Gegenstand wirkt nun eine Kraft abgewendet vom Mittelpunkt der Krümmung der Kraftlinie an dieser Stelle, oder eine Kraft, welche hinzeigt nach der Seite, wohin die konvexe Seite der Kraftlinie gekehrt ist. Dies bedeutet, daß näher zum anziehenden Zentrum die Kraft vom Drehungspol weg gerichtet ist, weiter aber dem Drehungspol zugewendet; im Wendepunkt einer Kraftlinie ist die Kraft Null.

Ist die Drehung so schnell, daß die Flüssigkeitsfläche ihre konvexe Seite dem Anziehungsmittelpunkt zukehrt, so kann die Flüssigkeitsoberfläche nur zum Teil verwirklicht werden; ein Äquator ist nicht möglich.

Die Gleichgewichtszustände werden beim Äquator gefunden, falls dieser möglich ist, und immer bei den Polen. Das erste Gleichgewicht ist immer stabil; das Gleichgewicht bei den Polen ist labil, falls ein Äquator möglich ist, und sonst, nämlich wenn die Flüssigkeitsoberfläche die konkave Seite von dem Anziehungsmittelpunkt abwendet, stabil; im letzteren Falle können die Umstände so sein, daß es irgendwo Kraftlinien gibt, die gerade in der Flüssigkeitsoberfläche ihren Wendepunkt zeigen; auch hier ist dann Gleichgewicht, aber dieses ist labil.

Die Wirkungen, bei welchen die Kräfte auf den schwimmenden Gegenstand polsuchend sind, können mit einem einfachen Experiment gezeigt werden: man lasse ein zylindrisches Wassergefäß rotieren um eine stehende Achse mit zum Beispiel einer Drehung per Sekunde

Wir betrachten die Erde als stillstehend und rechnen nur mit ihren Gravitationswirkungen, was bei der gebrauchten Rotationsgeschwindigkeit des Gefäßes gestattet ist. Dann ersetzen wir das Beschleunigungsfeld der Gegenstände, welche mit dem Gefäße rotieren, durch ein Gravitationsfeld und vereinigen dieses mit dem der anziehenden Erde. Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich nun senkrecht ein auf diese Kraftlinien, die ihre konvexen Seiten der Achse zuwenden, und sie hat fast ganz die Form eines Umdrehungsparaboloides.

Nachher wirft man ein Stückchen Holz auf das Wasser. Dieses erfährt die oben beschriebenen Kräfte, welche der Drehungsachse zugerichtet sind. Es verschiebt sich langsam der Flüssigkeitsoberfläche entlang dem Pole zu, erreicht ihn aber nie, denn die Kraft konvergiert gegen Null, wenn man dem Pole näher kommt.

Bei dieser Betrachtung wird natürlich vorausgesetzt, daß der schwimmende Gegenstand klein ist verglichen mit dem Krümmungshalbmesser (in einer Meridianfläche) der Kraftlinien.

Die obigen Auseinandersetzungen gelten für einen schwimmenden Gegenstand, dessen Schwerpunkt beim Schwimmen auf einer Flüssigkeit mit horizontaler Oberfläche höher liegt als jener der verdrängten Flüssigkeit. Der Effekt wird aber Null, wenn die Schwerpunkte zusammenfallen und wird umgekehrt, wenn der Schwerpunkt des Gegenstandes tiefer liegt als jener der verdrängten Flüssigkeit.

Letzteres verwirklicht man nun leicht experimentell, indem man an ein Stückchen Kork einen Nagel befestigt, der so schwer ist, daß das Ganze noch gerade zu treiben vermag; der Nagel ist dabei nach unten gerichtet. Läßt man das Gefäß sich drehen, dann bewegt der Kork sich der Außenseite zu[1]).

Kapillare Wirkungen haben Einfluß, und zwar meistens so, daß sie versuchen, den schwimmenden Gegenstand an die Wand zu ziehen, da sowohl die Wand wie der Kork vom Wasser benetzt werden; deshalb ist für den Physiker das Experiment mit dem Zündhölzchen überzeugender.

Didaktisch ergänzen die beiden Experimente sich aber sehr schön. Ein Schüler, der dem Experiment beiwohnte, sagte, als er verwundert die Bewegung des Korkes sah: „Man sollte doch eigentlich denken, daß der Kork nach dem tiefsten Punkte (dem Pole) gehen würde", mit welcher Behauptung das Paradoxe für den Beobachter, der nur einen Teil der Einflüsse in Betracht zieht, sehr gut ausgedrückt wurde. Das Experiment mit dem Zündholz ist aber paradox für denjenigen, der denken sollte, daß alles sich nach der Wand bewegen würde, da es doch eine Kreisbewegung gibt. Beide Experimente zusammen verhindern das Ziehen von Fehlschlüssen. Besonders überraschend ist auch der Effekt, wenn beide Gegenstände zu gleicher Zeit ins Gefäß gebracht werden. Nur achte man darauf, daß kapillare Wirkungen die Gegenstände nicht zusammenbringen. Man kann dieses erreichen, entweder durch die Stellung im Gefäß, oder (noch besser) indem man den Kork mit einer dünnen Schicht Paraffin bedeckt. Die beiden Gegenstände stoßen einander ab, während sowohl das Zündholz, als auch der Kork mit dem Nagel kapillare Kräfte überwinden müssen, wenn sie den Kräften nach Wegener gehorchen; der Beweis ist dann mit einem Experiment vollständig geliefert.

W. D. Lambert erwähnt[1]), daß die polfliehenden Kräfte für einen schwimmenden Gegenstand auf einer wie die Erdoberfläche gekrümmten flüssigen Masse, ein Maximum sind bei ungefähr 45° nördlicher oder südlicher Breite mit dem Ergebnis, daß ein langer Balken auf Breiten zwischen dem Äquator und der von 45° sich der Länge nach in der Richtung Ost-West legt, auf höheren Breiten aber Nord-Süd.

Unbekannt mit dieser Meinung kam ich zu dem gleichen Resultat nach einer experimentellen Beobachtung. Die Erklärung der Wahrnehmung brachte mich zur gleichen Anschauung wie Lambert.

Wirft man nämlich ein längliches Stückchen Holz in das mit konstanter Geschwindigkeit rotierende Gefäß mit Wasser (die Achse ist senkrecht), so bemerkt man erstens, — wie schon oben beschrieben —, daß das Hölzchen den Pol sucht, aber überdies stellt es sich, lange bevor der Pol erreicht ist, senkrecht ein auf die Fläche durch die Rotationsachse und die Mitte des Holzstäbchens.

Andererseits wird sich das Stäbchen in eine solche Richtung einstellen, daß die Verlängerung des Balkens durch die Achse geht, wenn der Schwerpunkt[2]) des Balkens tiefer liegt als jener der verdrängten Flüssigkeit; und die beiden beschriebenen Zustände kehren jeder für sich um,

1) Im Buche von Dr. Alfred Wegener: Die Entstehung der Kontinente und Ozeane, von 1929, ist auf Seite 178 dieses von mir angegebene Experiment beschrieben mit einem Hinweis auf den Artikel in der Niederländischen Zeitschrift „Physica". Auch liest man in dem Buche, daß Eötvös schon 1913 von der Krümmung der Gravitationslinien sprach, welche der mitgedrehte Beobachter auf Erde bemerkt.

1) Amer. Jour. of Science **2**, 129—158, 1921.

2) Eigentlich, wenn man es genau nimmt, kann man nicht von dem Schwerpunkt reden, da die Kraftfelder nicht homogen sind. Für Folgendes ist dieses aber ohne Schwierigkeiten möglich, wie eine einfache Berechnung es zeigt.

wenn das Gebiet, in welchem die maximalen polfliehenden oder polsuchenden Kräfte vorgefunden werden, überschritten wird.

Dieses Gebiet findet sich dort, wo die Normale des Paraboloids, nach welchem sich die Wasseroberfläche in größter Annäherung einstellt, einen Winkel von 45^0 mit der Rotierungsachse macht (die Berechnung gebe ich später).

Ein Balken, der dem Pol näher ist als das soeben beschriebene kritische Gebiet am Außenende, das vom Pol am weitesten entfernt ist, wird ja stärker zum Pol getrieben werden als am anderen Ende. Der Balken wird sich also umwenden wie beschrieben wurde.

Es sind aber auch noch andere interessante Dinge an der Bewegung des Balkens verbunden.

Erstens ist die Masse der verdrängten Flüssigkeit der Masse des schwimmenden Gegenstandes nicht gleich, da die beiden Massen sich an verschiedenen Stellen im nicht homogenen Kräftefelde befinden. Der Schwerpunkt des schwimmenden hölzernen Balkens liegt „höher" als derjenige der verdrängten Flüssigkeit. Die Masse des Balkens ist der Achse näher und in einem Teil des scheinbaren zentrifugalen Gravitationsfeldes mit schwächerer Intensität. Wären die Massen des Balkens und der verdrängten Flüssigkeit einander gleich, dann würde der Auftrieb durch die verdrängte Flüssigkeit zu groß sein. Der Balken ragt deshalb etwas höher aus dem Wasser als in einem homogenen Gravitationsfelde.

Das Schiff dagegen mit dem tiefliegenden Schwerpunkt sinkt etwas tiefer in das Wasser hinein; und es kann so schlimm werden, daß der Gegenstand untersinkt und in gewisser Entfernung von der Achse völlig untergetaucht schweben bleibt. Unter Wasser wird er sich schließlich in einer Richtung parallel mit der Achse bewegen, da das Gravitationsfeld der Erde homogen ist; das zu viel verdrängte Wasser staut den Gegenstand in die Höhe. Auch dieses läßt sich experimentell sehr gut bestätigen.

Zweitens wird der lange Balken bei Annäherung an den Pol mit seiner Mitte aus dem Wasser gehoben, infolge der sich dort befindlichen größeren Krümmung der Oberfläche; die Außenenden tauchen dann unter; und wenn wir dann die Kräfte, die zum Pol hintreiben, berechnen, finden wir, daß diese Werte schneller dem Nullwert näher kommen, als bei einem Balken, der sich biegsam der gekrümmten Wasseroberfläche anpassen würde. Der Pol wird deshalb schwer erreicht.

Prof. Dr. P. Ehrenfest machte mich aufmerksam auf den etwaigen Einfluß der kapillaren Wirkung, weil die Wasseroberfläche gekrümmt ist; diese Krümmung ist nicht unbedeutend.

Ohne Mühe kommt man zur Einsicht, daß ein schwimmender Gegenstand, dessen eine Symmetrieachse senkrecht steht auf den Radiusvektor, von der Mitte des Gegenstandes zur Achse gedrängt wird zu den Stellen der Wasseroberfläche, wo die Krümmung größer ist, falls der Gegenstand von der Flüssigkeit benetzt wird. Es gibt deshalb im rotierenden Wassergefäß eine polsuchende Kraft.

Die kapillaren Kräfte kehren ihre Richtung um, falls der Gegenstand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; der Gegenstand findet eine Gleichgewichtslage, wo die Summe der kapillaren Kräfte und der zentripetalen Trägheitskräfte, falls der Schwerpunkt des schwimmenden Gegenstandes „hoch" liegt — Null ist.

Aber hiermit ist die Sache noch nicht erledigt. Die kapillaren Wirkungen sind von der Lage auf der Wasseroberfläche abhängig; falls wir es mit einem länglichen Gegenstande, wie z. B. einem kleinen Balken, zu tun haben. Wird der Balken vom Wasser benetzt, dann tritt ein Moment auf bei einer Lage, welche nicht symmetrisch ist in bezug auf den Radiusvektor zum Pole; dieses Moment sucht den Balken in eine Lage zu drehen, bei welchem die längere Achse senkrecht auf den Radiusvektor zum Pole steht. Bei nicht benetzten Gegenständen ist es umgekehrt. Bei diesen Dingen gilt nämlich die einfache Regel, daß der benetzte Gegenstand sich derartig dreht, daß die Normalfläche durch die Längsachse eine kleinste Krümmung hat; bei dem nicht benetzten Gegenstande ist dies umgekehrt.

Auch diese Momente wirken im selben oder im entgegengesetzten Sinne wie die Momente der Trägheitswirkungen. Bei dem benetzten Balken wirken sie vereinigt; die Endlage ist senkrecht zur Meridianfläche, bei dem nicht benetzten Balken gibt es dagegen entgegengesetzte Wirkung, erstens der dem Pole zugerichteten Kräfte und zweitens der Momente. Was geschieht nun?

Die kapillaren Kräfte sind proportional mit den Krümmungen oder ihren Unterschieden an verschiedenen Stellen der Oberfläche. Die kapillaren Kräfte, die senkrecht zur Längsrichtung des Balkens einwirken, sind bei einem schmalen Balken verhältnismäßig unabhängig von der Breite; die, welche in der Längsrichtung wirken, sind abhängig von der Länge und werden größer je nachdem die Länge des Balkens zunimmt. Die Momente sind relativ unabhängig von der Breite, aber nehmen zu mit der Länge; sowohl die Kräfte in der Längsrichtung, wie auch die Momente, sind in erster Annäherung proportional mit der Länge.

Der Krümmungsradius der Wasseroberfläche

am Pol ist gleich $\frac{g}{w^2}$, worin g die Beschleunigung der Gravitation der Erde ist und w die Winkelgeschwindigkeit. Da die Parabeln alle gleichförmig sind und die Oberfläche ein Umdrehungskörper, sind die Krümmungen an übereinstimmenden Stellen proportional mit w^2.

Die Kräfte und die Momente sind proportional mit w^2; aber auch die Trägheitskräfte und Momente sind proportional mit w^2. Man sollte also erwarten, daß der Balken sich bei allen Winkelgeschwindigkeiten entweder senkrecht zur Meridianfläche, oder mit seiner Achse in die Richtung des Poles einstellen würde, wie er dieses bei einer Winkelgeschwindigkeit tut. Und falls ein Gleichgewicht gefunden würde bei welchem die zentripetalen und zentrifugalen Wirkungen sich gegenseitig aufheben, bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit, dann wird solches bei allen Winkelgeschwindigkeiten stattfinden.

Das Experiment zeigt nun etwas sehr Eigentümliches. Dreht sich das Wassergefäß langsam, so stellt sich der Balken, der nicht benetzt wird, senkrecht zur Meridianfläche ein, und in einer bestimmten Entfernung vom Pole wird ein Gleichgewicht erreicht; vergrößert man dann die Winkelgeschwindigkeit, so fängt der Balken plötzlich an sich zu drehen, bis er zum Pole hinweist, und bewegt sich nachher mit mäßiger Geschwindigkeit zentrifugal nach der Wand des Gefäßes.

Dies müssen wir nun folgendermaßen erklären: Die Krümmungsunterschiede nehmen in der Umgebung des Poles, proportional mit der Entfernung ab; in größeren Entfernungen aber stärker. Die Trägheitskräfte aber nehmen ab, proportional mit der Entfernung in der Umgebung des Poles; durch das tiefere Untertauchen der Außenenden nehmen sie mehr ab als proportional mit der Entfernung des Poles. Es wird also eine Gleichgewichtslage möglich sein. Die kapillaren Kräfte überwiegen um so mehr, je kleiner die Querdurchmesser sind, da die Trägheitskräfte proportional mit dem Umfang sind, und die anderen ungefähr proportional mit dem Längsdurchmesser. Für einen nicht zu kleinen Gegenstand ist deshalb ein Gleichgewicht, wie oben beschrieben, möglich.

Nun macht man die Rotationsgeschwindigkeit größer. Die kapillaren Kräfte nehmen zu proportional mit w^2; die Trägheitskräfte genau so, was die Gleichförmigkeit der Parabel anbelangt auf entsprechenden Stellen, wenn nicht an allen Stellen die Eintauchtiefe der Balkenenden infolge der Krümmung zunähme; denn hierdurch nehmen die trägheitszentripetalen Kräfte ab. Das Gleichgewicht wird also dermaßen gestört, daß die kapillaren Kräfte anfangen zu überwiegen. Abhängig von der Länge des Balkens fängt zuerst das Drehen an und nachher das Polfliehen. Die physikalischen Figuren bei der geänderten Winkelgeschwindigkeit sind also auch nur gleichförmig, wenn man die Wasseroberfläche in Betracht zieht; der Balken nimmt selber nicht an der Ähnlichkeitstransformation Teil.

Ist einmal der nicht benetzte Balken weiter vom Pole entfernt als die Stellen der Flüssigkeitsoberfläche an welchen die Normale einen Winkel von 45° mit der Rotierungsachse bildet, dann unterstützt die kapillare Wirkung die Trägheitswirkungen; beide Kräfte drehen den Balken bis in die Meridianfläche.

Die kapillaren Wirkungen spielen eine Rolle bei dem Experiment im Laboratorium, wenn die Gegenstände klein sind. Aber bei größeren Gegenständen spielen sie keine Rolle mehr.

Bei der Flüssigkeitsoberfläche, die konvex gekrümmt ist und nicht viel abweicht von der Kugelform, sind die Kräfte maximal auf 45° Breite ungefähr (s. Lambert l. c.), so daß daraus ein drehender Einfluß auf einen schwimmenden Gegenstand resultiert. Ein hölzerner Balken wird in höheren Breiten als 45° sich Nord-Süd einstellen; nur wenn die Mitte des Balkens auf dem Pol liegt, gibt es keine drehende Kraft. Unterhalb 45° Breite, am meisten in der Nähe vom Äquator, gibt es eine drehende Kraft, und der Balken stellt sich Ost-West ein.

Welche Bedeutung hat nun das Vorhergehende in Beziehung zum Kontinententrieb?

Erstens: In den Berechnungen in der Literatur wird die polfliehende Kraft zwar richtig berechnet, aber sie ist unter ziemlich viel Mathematik verborgen. Man kommt aber einfacher zum richtigen Betrag, wenn man acht gibt auf die zu viel oder zu wenig verdrängte Flüssigkeit, infolge der Inhomogenität der Kraftfelder. Später werde ich diese Berechnungen angeben. In dem wichtigen und interessanten Artikel von P. S. Epstein[1]) wird am Ende eine Formel gegeben ohne nähere Ableitung für Kräfte, welche parallel dem Äquator wirken sollten. Aber mir scheint es, daß in dieser Formel ein Fehler steckt, durch den diese Kräfte ungefähr 1000mal zu groß geschätzt worden sind. Der Verfasser nimmt als Basis die Asymmetrie in der Massenverteilung infolge der Kontinente selber, die in Zusammenwirkung mit der Achsenumdrehung die nötigen Kräfte liefern müßten. Mehr auf der Hand liegt die Zusammenwirkung der Achsenumdrehung mit einer tiefergehenden Asymmetrie, welche in der Erde vorgefunden wird, und es ist interessant hierüber eine Schätzung zu machen. Allmählich

1) Naturwissensch. **10**, 499, 1922.

werden wir etwas skeptischer der Symmetrie gegenüber, und aus den Abweichungen des Äquators von der Kreisform läßt sich eine Schätzung der inneren Asymmetrie in der Massenverteilung machen, welche beträchtlicher ist als die von Epstein angenommene. Wegener sucht die Ursachen dieser Kräfte in der Bewegung des Poles, was sehr plausibel ist.

Zweitens: Man könnte vielleicht auf einer zähflüssigen Masse kontinentenähnliche Gegenstände anbringen, und in der Weise eine der Erde analoge Figur herstellen, und einmal sehen, was geschieht. Die Abbildung würde der Wirklichkeit, wie sie an der Erdoberfläche ist, analog sein, da auch eine Zone von maximalen polsuchenden oder polfliehenden Kräften gefunden wird. Sie würde entgegengesetzt sein, falls die Kontinentenabbildung, Kontinente mit hochliegenden Schwerpunkten hätte, da der Pol der rotierenden Flüssigkeitsoberfläche dem Äquator der wirklichen Erde entspricht; der Pol des Wassergefäßes entspricht aber dem Pole der wirklichen Erde, wenn die Schwerpunkte tiefer gewählt werden. Dann wäre experimentell abzubilden, daß die Lage der Kontinente, für die die Summe der Momente Null ist, ungefähr so ist, wie das vorhergehende es fordert. Man beachte einmal Afrika; der nördliche Teil Afrikas liegt parallel am Äquator; diese Lage ist in stabilem Gleichgewicht; der südliche Teil steht senkrecht auf dem Äquator; diese Lage ist in labilem Gleichgewicht, aber da die Masse dieses letzteren Teiles kleiner ist und die Entfernung vom Äquator größer — in der Nähe des Äquator sind die Drehungskräfte am größten — kann man sagen, daß Afrika sich in stabilem Gleichgewicht befindet.

Ebenso beachte man mal Südamerika, welches durch seine eigentümliche Form gleichfalls in stabilem Gleichgewicht ist.

Der lange Balken Asien-Europa ist indifferent diesen Dingen gegenüber; die Summe der Momente ist ungefähr Null und die polfliehenden Kräfte zusammen mit den Reibungswiderständen werden bei oberflächlicher Betrachtung keine Momente ausweisen.

Das schiefliegende Amerika mit seinem großen Kopfe ist in Drehung. Die Auffassung, daß der Kontinent Nordamerika-Südamerika bei Mittelamerika aufgebogen wird, ist hiermit in Übereinstimmung: Nordamerika ist in drehender Bewegung, Südamerika ist stillstehend am Äquator gemessen.

Und schließlich noch eine andere Frage: Sollten nicht auch in den Sonnenflecken mit ihrem wahrscheinlich ungleichen spezifischen Gewicht polfliehende oder polsuchende Kräfte tätig sein?

Leicht wird es meines Erachtens möglich sein, eine Statistik zu machen über die Achse der Sonnenflecke. Dann muß man finden, daß entweder die langen Achsen der Sonnenflecken auf kleineren Breiten als 45^0 parallel zum Äquator liegen, die auf größeren Breiten in einer Meridianfläche, oder umgekehrt; während die langen Achsen in der Umgebung von 45^0 keine ausgezeichnete Lage haben. Wichtige Folgerungen über spezifische Gewichte können hieraus vielleicht gezogen werden.

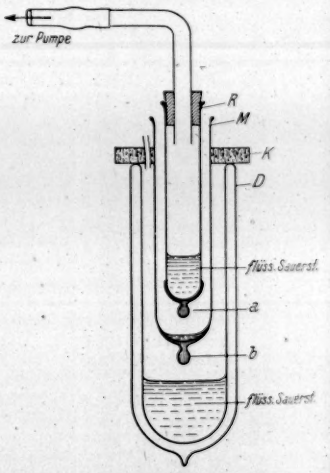
Haag (Holland), Christelijk Gymnasium. Dezember 1929.

(Eingegangen 14. Dezember 1929.)

Ein Vorlesungsversuch mit flüssigem Sauerstoff.

Von H. Keefer.

In der Vorlesung über das Kapitel der Gasverflüssigung wird man neben den bekannten Schauversuchen mit flüssigem Sauerstoff oder mit flüssiger Luft vor allem die wertvolleren Versuche



mit wissenschaftlichem Einschlag zur Vorführung bringen. Einer dieser Versuche mit flüssigem Sauerstoff, der m. W. noch nirgends erwähnt wurde, ist der Folgende: Bringt man in ein Reagenzglas R einige cm^3 flüssigen Sauerstoff, und pumpt man in der durch die Figur angedeuteten

Weise mittels einer gut wirkenden Wasserstrahlsaugpumpe den sich entwickelnden Sauerstoffdampf rasch weg, so findet bekanntlich infolge der gesteigerten Verdunstung eine so starke Abkühlung des flüssigen Sauerstoffs und seiner Umgebung statt, daß sich die Luft, welche die Wände des Rohres R bespült, bei der Berührung mit dieser Kälte von etwa -200^0 C ohne Druck verflüssigt. Ihre Verflüssigungstemperatur bei atmosphärischem Druck, d. h. ihr Taupunkt, beträgt ja nur -193^0 C. Sie rieselt alsdann an der Wand des Rohres herunter, und es bietet sich die überraschende Erscheinung, daß die gegen Verflüssigung so spröde Luft von dem Rohr bei a heruntertropft. Der Versuch gelingt sehr gut, wenn man die Röhre R in ein etwas weiteres Mantelrohr M hineinhält, das lose, mittels einer Korkscheibe K auf den Rand eines durchsichtigen Vakuumglasgefäßes D aufgesetzt ist, das ebenfalls einige cm³ flüssigen Sauerstoff enthält. Dieselbe Versuchsanordnung zeigt aber noch eine weitere interessante Erscheinung. Die von dem Reagenzglas R abtropfende flüssige Luft verdunstet auf dem Boden des Mantelrohres M so rasch, daß sich auch dieses unter die Kondensationstemperatur -183^0 C des Sauerstoffes abkühlt, so daß sich die von O aufsteigenden Sauerstoffdämpfe an der Außenwand des stark abgekühlten Behälters wieder niederschlagen. Dieser Niederschlag fließt zu einem Tropfen bei b zusammen, der dann nach kurzer Zeit abfällt. Solange nun die Pumpe wirkt und genügend flüssiger Sauerstoff in beiden Behältern sich befindet, solange kann man dann auch beobachten, daß von der Außenwand des Rohres R flüssige Luft und von der Wandung des Behälters M flüssiger Sauerstoff abtropft. Wählt man zu der experimentellen Anordnung Behälter mit besonders gleichmäßigen Wandungen aus, so kann man die Erscheinung leicht einem größeren Auditorium durch Projektion sichtbar machen.

Reutlingen, chemische Abteilung des Technikums, im Mai 1930.

(Eingegangen 26. Mai 1930.)

BESPRECHUNGEN.

O. D. Kellogg, Foundations of Potential Theory. 384 S. Mit 30 Textfig. Berlin 1929. J. Springer. RM 21.60.

Das Buch ist erschienen als Band 31 der Sammlung „Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen". Der Inhalt ist rein mathematisch orientiert, sehr inhaltsreich und sehr exakt, aber es werden wahrscheinlich nur wenige Physiker mit ausgesprochener Neigung zu solchen Dingen an der Lektüre Freude haben. Recht störend und eigentlich nicht recht verständlich ist, daß die Herausgeber offenbar einfach das englische Originalmanuskript in die Druckerei weitergegeben haben; eine gute Übersetzung würde die Benutzung des Buches, bei dem es auf ein Eindringen in feinste Einzelheiten ankommt, auch für die Leser erleichtert haben, die sonst mit fremdsprachlichen Arbeiten mühelos fertig werden. R. Seeliger.

G. Wiarda, Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. 183 S. Mit 8 Textfig. Leipzig 1930. B. G. Teubner. RM 9.60.

Unter Beschränkung auf das Wesentliche und angenehmer Vermeidung einer für den Physiker meist entbehrlichen übertriebenen Strenge wird sehr übersichtlich — „Definitionen" und „Sätze" sind stets hervorgehoben — die Theorie der Integralgleichungen zweiter Art entwickelt und auf die bekannten Beispiele (Saitenschwingungen, Wärmeleitungsprobleme, Randwertaufgaben der Potentialtheorie und dgl.) angewendet. Leider nicht behandelt werden die Volterraschen Integralgleichungen, die Integro-Differentialgleichungen und die Integralgleichungen erster Art. Zur Einführung in das Gebiet und zur Vorbereitung für die Lektüre etwa des ausgezeichneten Enzyklopädieartikels von Toeplitz u. Hellinger, gelegentlich wohl auch zu einer rekapitulierenden Orientierung über die wichtigsten Sätze ist das Buch also bestens geeignet. R. Seeliger.

G. Bruhat, Traité de Polarimétrie. 447 S. Mit 250 Textfiguren. Paris 1930. Edition de la Revue d'Optique. Fr. 65.—.

Wie schon das Literaturverzeichnis von fast 900 Arbeiten zeigt, gibt der Verfasser eine sehr eingehende und vollständige Darstellung der die Erzeugung, Untersuchung und Anwendung des polarisierten Lichtes betreffenden Fragen. Im ersten Hauptabschnitt, der 6 Kapitel umfaßt, werden die Apparate und Methoden zu polarimetrischen Untersuchungen behandelt. (Allgemeine Einleitung, Polarisationsprismen, Bestimmung der Polarisationsrichtung, Apparate zur Messung der Drehung der Polarisationsebene, Messung der Rotationsdispersion, Messung des zirkularen Dichroismus.) Der zweite Hauptabschnitt mit 5 Kapiteln ist den Erscheinungen, die mit der Drehung der Polarisationsebene zusammenhängen und ihren Anwendungen gewidmet (Natürliche Drehung, Optische Aktivität und Molekülbau, Rotationsdispersion, Quantitative Messungen, Drehung in Kristallen, Magnetische Drehung); nicht behandelt ist leider der elektrische

Kerreffekt. Der sehr umfangreiche Stoff wird durchwegs nach der rein experimentellen bzw. meßtechnischen Seite hin behandelt, mathematische Entwicklungen sind fast ganz vermieden, über die Theorien der behandelten Erscheinungen wird stets nur kurz berichtet. Als ein Handbuch für den Experimentator und den Praktiker ist demnach das Buch zu werten und in diesem Sinn wird es sicher vielfach von Nutzen sein können. R. Seeliger.

Th. Wulf, Lehrbuch der Physik. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. 547 S. mit 201 Figuren. Freiburg 1929. Herder & Co. Geb. RM 22.—.

Daß sich Th. Wulfs Lehrbuch der Physik viele Freunde erwerben würde, war zu erwarten und kommt nun auch darin zum Ausdruck, daß schon drei Jahre nach der ersten Auflage die zweite notwendig geworden ist. Es weicht bekanntlich bewußt ab von der in fast allen anderen Lehrbüchern üblich gewordenen Anordnung des Stoffes; denn es stellt — wie seiner Zeit etwa das Lehrbuch von H. Ebert energetische Gesichtspunkte — nun den Aufbau der Körper als den leitenden Grundgedanken in den Vordergrund und ordnet diesem Grundgedanken die Auswahl der behandelten Gegenstände und die ganze Disposition unter. Dies bringt, wie in den Besprechungen der ersten Auflage bereits anerkannt worden ist, viele Vorteile mit sich, die im einzelnen nochmals hervorzuheben nicht nötig sein dürfte. Aber man darf nicht vergessen, daß auf der anderen Seite auch manche Nachteile mit in den Kauf genommen werden müssen. „Die Herleitung der Erscheinungen aus dem inneren Bau der kleinsten Bestandteile der Körper" steht zwar eben im Mittelpunkt des Interesses der meisten Physiker, die restlose Erfüllung dieses Programms liegt aber immerhin noch in recht weiter Ferne. Jedenfalls gibt es zur Zeit in der Physik noch so manches Wichtige und Schöne, das sich jenem Programm nicht einordnen läßt und der Autor trägt dem auch Rechnung, z. B. in einem fast hundert Seiten umfassenden Kapitel über die Physik des Äthers. Ein anderer Leitgedanke, nämlich die Heraushebung „der grundlegenden Ergebnisse der Physik" und das Fortlassen von allem „was mehr der technischen Anwendung als dem Verständnis des Grundsätzlichen gedient hätte", engt die Auswahl des Stoffes aber noch weiter ein. Was grundlegend und grundsätzlich wichtig ist, läßt sich natürlich an sich überhaupt nicht festlegen, sondern eben nur durch ein Werturteil etwa auf Grund eines bestimmten Programms. So kommt es, daß — um nur einige Beispiele zu nennen — von der ganzen Hydrodynamik, von den Vorgängen in den eigentlichen Gasentladungen, von den Phosphoreszenzerscheinungen, der Dispersion, der Ultrarotforschung usw. so gut wie nichts zu finden ist. Es ist schade, daß solche Lücken den Wert dieses sonst so originellen, klar und anschaulich geschriebenen Buches doch sehr beeinträchtigen. Man wird sich dessen vielleicht erst so recht bewußt wenn man sich z. B. als akademischer Lehrer ernstlich die Frage stellt, wem nun eigentlich man das Buch als Lehrbuch empfehlen sollte.

Von den zahlreichen Verbesserungen und Ergänzungen, die in der zweiten Auflage hinzugekommen sind, seien außer einer erheblichen Vermehrung der Figuren nur erwähnt ein neuer Absatz über die Vereinigung der Atome zu Molekülen und insbesondere der Schlußabschnitt über „Die Bestrebungen der Neuzeit", in dem sehr eindringlich und klar, abschließend mit einem Ausblick auf die Wellen- und Quantenmechanik, über die neuesten theoretischen und experimentellen Fortschritte berichtet wird.

R. Seeliger.

Grimsehls Lehrbuch der Physik. I. Band. Mechanik, Wärmelehre, Akustik. Gr.-8°. VIII u. 700 S. Mit 700 Abb. 7. Aufl., vollst. neu bearb. von R. Tomaschek. Leipzig und Berlin 1929. B. G. Teubner. Geb. RM 22.—.

Die Neuauflage des bekannten und mit Recht beliebten Lehrbuchs verrät immer noch den Geist seines Verfassers mit dem Hauptvorzug einer anschaulichen und wohlverständlichen Darstellungsweise. An grundsätzlichen Änderungen wäre zunächst die stoffliche Neueinteilung zu nennen: Die Optik ist ganz aus dem 1. Band entfernt und wird im 2. Band Platz finden, der in 2 Teile „Elektromagnetisches Feld" und „Aufbau der Materie" zerfallen soll. Ferner ist das Buch in vielen Einzelheiten auf den heutigen Stand gebracht. Besonders wirkt sich das aus in der Tatsache, daß die molekulare Theorie der Materie sehr frühzeitig — schon in der Mechanik — eingeführt und in der Wärmelehre ausführlich behandelt wird. Ferner ist die Schwingungslehre beträchtlich ausgebaut und erörtert fundamentale Begriffe wie Dämpfung, Phasenverschiebung, Kopplung. Die neuere Technik findet, von vielen einzelnen Hinweisen abgesehen, Berücksichtigung in erweiterter Behandlung der Kraftmaschinen. Die Aerodynamik ist gegenüber der letzten Auflage wieder gekürzt.

Die Ausstattung des Buches ist zu loben. Besonders freut man sich wieder an den schönen Grimsehlschen Wasserwellenaufnahmen.

Dr. E. Nies.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. W. Kanengro für Physikalische Chemie und Elektrochemie, an der Universität Berlin Dr. W. Lange für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Bonn Dr. Franz Wever, Abteilungs-Vorsteher am Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung in Düsseldorf, zum a. o. Professor für angewandte Physik, der Privatdozent an der Universität Hamburg Dr. Walter Gordon zum a. o. Professor ebenda, Dr. A. Guyer in Mähr.-Ostrau zum ord. Professor der chemischen anorganischen Technologie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Ehrung: Der ord. Professor der Physik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Max Planck wurde zum Präsidenten der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Berlin, der ord. Professor der Physik an der Universität Bonn Dr. Heinrich Konen zum Schriftführer derselben ernannt.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. P. Debye in Leipzig. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.